Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Р. Н. КАУФМАН

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ СЛОЙ С ШАРОВОЙ ПОЛОСТЬЮ В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

(Представлено академиком В. А. Фоком 6 II 1954)

Требуется найти 4 функции, определенные каждая в своей области (см. рис. 1) и удовлетворяющие следующим требованиям:

1) они должны быть гармоническими внутри соответствующих областей;

2) на поверхностях раздела должны выполняться два граничных условия:

$$f_i = f_k \quad \text{и} \quad \varepsilon_i \frac{\partial f_i}{\partial n} = \varepsilon_k \frac{\partial f_k}{\partial n} \quad (\varepsilon_3 = \varepsilon_2),$$

где значки i и k берутся в соответствии с рассматриваемой поверхностью;

3)

$$f_i - f_0 = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial (f_i - f_0)}{\partial l} = O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

где $\partial / \partial l$ есть производная по любому направлению; f_0 — потенциал внешнего поля, равный

$$f_0 = E_0 x = E_0 r P_1^1(\cos\theta)\cos\varphi$$

(рис. 1), $\cos\varphi$ отсчитывается от направления внешнего поля.

Рассмотрим частный случай, когда центр шаровой полости O равно удален от граничных плоскостей A и B. Будем искать f_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ в виде рядов по шаровым функциям:

$$f_1 = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{P_n^1(\cos\theta) r^n \cos\varphi}{a^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{P_n^1(\cos\theta)\, r^n \cos\varphi}{R^{n+1}}; \qquad (1)$$

$$f_2 = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{P_n^1(\cos\theta) R^n \cos\varphi}{r^{n+1}} + \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(\mu)} \frac{P_n^1(\cos\theta_2^{(\mu)}) R^n \cos\varphi}{(r_2^{(\mu)})^{n+1}}, \qquad (2)$$

и из соображений симметрии:

$$f_3 = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{P_n^1(\cos\theta) R^n \cos\varphi}{r^{n+1}} + \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(\mu)} \frac{P_n^1(\cos\theta_1^{(\mu)})(-1)^{n+1} R^n \cos\varphi}{(r_1^{(\mu)})^{n+1}}, \qquad (3)$$

$$f_4 = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \frac{P_n^1(\cos\theta) R^n \cos\varphi}{r^{n+1}} + \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} G_n^{(\mu)} \frac{P_n^1(\cos\theta_1^{(\mu)}) R^n \cos\varphi}{(r_1^{(\mu)})^{n+1}} +$$

$$+ \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} G_n^{(\mu)} (-1)^{n+1} \frac{P_n^1(\cos\theta_2^{(\mu)}) R^n \cos\varphi}{(r_2^{(\mu)})^{n+1}}, \qquad (4)$$

где $\theta_1^{(\mu)}$, $\theta_2^{(\mu)}$, $r_1^{(\mu)}$ и $r_2^{(\mu)}$ — углы и расстояния, отсчитываемые как указано на рис. 1.

Неизвестные коэффициенты A_n, B_n, C_n, $D_n^{(\mu)}$, E_n и $G_n^{(\mu)}$, имеющие размерность заряда, определим из граничных условий. Принимая во внимание, что

$$P_n^1(-\cos\alpha) = (-1)^{n+1} P_n^1(\cos\alpha),$$

найдем, что для выполнения граничных условий на плоскости A являются достаточными соотношения:

$$C_n = E_n + G_n^0(-1)^{n+1}; \quad \varepsilon_2 C_n = \varepsilon_4 E_n + \varepsilon_4 G_n(-1)^n;$$

$$D_n^{(\mu)} = G_n^{(\mu)}(-1)^{n+1} + G_n^{(\mu+1)}(-1)^{n+1};$$

$$\varepsilon_2 D_n^{(\mu)} = \varepsilon_4 G_n^{(\mu)}(-1)^{n+1} + \varepsilon_4 G_n^{(\mu+1)}(-1)^n, \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots,$$

откуда имеем:

$$\begin{gathered} C_n = (1+q)E_n; \quad G_n^{(\mu)} = qG_n^{(\mu-1)} = q^{\mu+1}(-1)^{n+1}E_n; \\ D_n^{(\mu)} = q^{\mu+1}(1+q)E_n, \quad \text{где } q = \frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_2}{\varepsilon_4 + \varepsilon_2}. \end{gathered} \tag{5}$$

Граничные условия на плоскости B дадут, очевидно, те же соотношения.

При помощи формулы разложения (рис. 1) (способ ее вывода см. [1]).

$$\frac{P_n^1(\cos\theta_1^{(\mu)})}{(r_1^{(\mu)})^{k+1}} = (-1)^{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(k+n)!}{(k+1)!\,(n-1)!}\frac{P_n^1(\cos\theta)\,r^k}{[(\mu+1)a]^{k+n+1}} \quad \text{для } r < (\mu+1)a$$

приводим f_2 к одним переменным r и θ:

$$f_2 = f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} E_k \frac{P_k^1(\cos\theta)R^k\cos\varphi}{r^{k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \frac{P_k^1(\cos\theta)r^k\cos\varphi}{a^{k+1}},$$

где

$$d_k = [1+(-1)^{k+1}]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(k+n)!}{(k+1)!\,(n-1)!}\left(\frac{R}{a}\right)^n E_n \sum_{p=1}^{\infty}\frac{q^p}{p^{n+k+1}}, \tag{6}$$

и из граничных условий на поверхности полости получаем:

$$\frac{B_k}{R^{k+1}} + \frac{A_k}{a^{k+1}} = \frac{E_k}{R^{k+1}} + \frac{d_k}{a^{k+1}}, \tag{7}$$

$$\frac{\varepsilon_1 kB_k}{R^2} + \frac{\varepsilon_1 kR^{k-1}A_k}{a^{k+1}} = -\frac{\varepsilon_4 E_k(k+1)}{R^2} + \frac{\varepsilon_4 kR^{k-1}dk}{a^{k+1}} + (\varepsilon_4 - \varepsilon_1)E_0\delta_{1k}. \tag{8}$$

Уравнению (7) удовлетворяем, положив:

$$E_k = B_k, \tag{9}$$

$$A_k = d_k. \tag{10}$$

Тогда из (8) получаем:

$$B_k = g_k\left[\left(\frac{R}{a}\right)^{k+1} A_k + \delta_{1k} E_0 R^2\right], \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

где $g_k = \frac{(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)\, k}{\varepsilon_1 + \varepsilon_4 (k+1)}$.

Введем коэффициенты $\overline{B}_k$:

$$B_k = g_k \left(\frac{R}{a}\right)^{k+1} A_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

т. е.

$$\overline{B}_k = B_k \text{ для } k \neq 1; \quad B_1 = \overline{B}_1 + g_1 \left(\frac{R}{a}\right)^2 E_0 R^2. \tag{13}$$

Умножив (10) на $g_k \left(\frac{R}{a}\right)^{k+1}$ и используя (6), (9), (11) и (12), получим бесконечную систему линейных уравнений для определения $\overline{B}_k$:

$$\overline{B}_k = 2 g_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k+n)!}{(k+1)!\,(n-1)!} \left(\frac{R}{a}\right)^{n+k+1} \overline{B}_n \sum_{p=1}^{\infty} \frac{q^p}{p^{n+k+1}} + b_k, \tag{14}$$

где $b_k = g_k \left(\frac{R}{a}\right)^{k+1} E_0 R^2 g_1$, а n и k принимают только нечетные значения.

Обозначив коэффициенты при $\overline{B}_n$ через C_{kn}, устанавливаем, что суммы $\sum_{n=1}^{\infty} C_{kn}$ сходятся к нулю при $k \to \infty$ с быстротой геометрической прогрессии для $R/a < 1/2$, поэтому $\sum_{k,n=1}^{\infty} C_{kn}^2 < \infty$ для $R/a < 1/2$. Кроме того, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < \infty$. Из этих свойств системы ([2]) и теоремы об однозначности решения электростатических задач заключаем о существовании и единственности ограниченного решения системы, которое может быть эффективно найдено методом редукции.

Определив $\overline{B}_k$, находим, согласно (5), (9), (12) и (13), и все другие коэффициенты.

Ряды (1), (2), (3) и (4) сходятся равномерно и дают нам решение задачи.

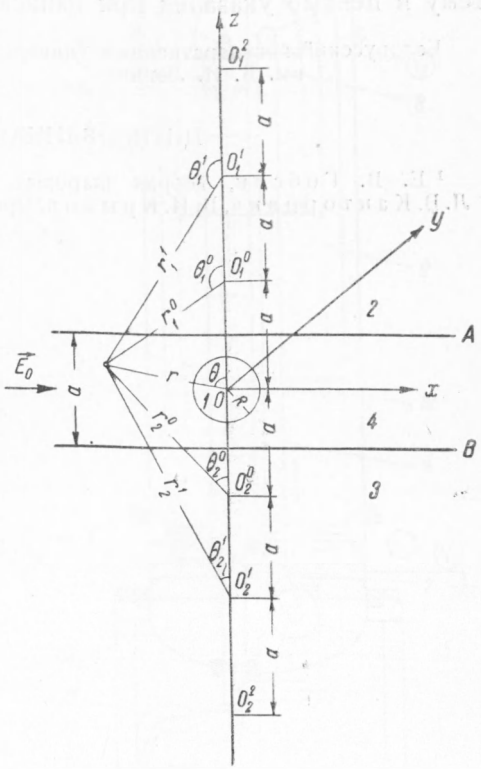


Рис. 1

Дифференцируя по x, y и z (рис. 1), находим выражения для составляющих напряженности поля.

В частном случае, когда $\varepsilon_4 \gg \varepsilon_1$ и ε_2 (что соответствует ферромагнитному слою с шаровой полостью в магнитном поле) и $R/a = 1/4$, найдено что с погрешностью, меньшей 1%, для точек вне слоя, при-

мыкающих к граничным плоскостям, E_z и E_y могут быть представлены в виде:

$$E_z = -1{,}53\,R^3 E_0 \left(\frac{\sin 2\theta}{r^3} + \frac{\sin 2\theta_i^0}{(r_i^0)^3} + \frac{\sin 2\theta_i'}{(r_i')^3} \right) \cos\varphi,$$

$$E_y = -1{,}53\,R^3 E_0 \left(\frac{\sin^2\theta}{r^3} + \frac{\sin^2\theta_i^0}{(r_i^0)^3} \right) \sin 2\varphi,$$

где i равно 1 или 2 в зависимости от того, к какой плоскости, B или A, примыкают рассматриваемые точки.

В общем случае, когда центр шаровой полости не равноудален от граничных плоскостей, задача решается таким же способом, причем точки $O_1^{(\mu)}$ и $O_2^{(\mu)}$ (рис. 1), попрежнему являясь зеркальными изображениями точки O относительно плоскостей A и B, располагаются, в соответствии с изменением положения точки O, иначе.

Применяя метод этой статьи и метод А. М. Родова *, можно найти функции влияния первой и второй краевых задач для уравнения $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ для области *4* рис. 1, а также функцию влияния первой краевой задачи для того же уравнения для прямого параллелепипеда с шаровой полостью.

В заключение автор благодарит А. М. Родова за предложенную тему и ценные указания при написании данной работы.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
9 X 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. В. Гобсон, Теория шаровых и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1952.
[2] Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, 1949.

* Устное сообщение.