Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. Б. ДАЦЕВ

О ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ СТЕФАНА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 27 I 1955)

Данное в [1] решение двухмерной задачи замерзания (задачи Стефана) легко обобщается для трехмерной задачи, которую можно поставить следующим образом.

Пусть A_1 и A_2 — твердая и жидкая фазы некоторого тела (например, лед и вода). В трехмерном пространстве, где выбрана ортогональная система $OXYZ$, тело A_2 занимает простую область $R^{(2)}$, ограниченную замкнутой поверхностью C_0, имеющей касательную плоскость в каждой своей точке. A_1 занимает бесконечную двухсвязную область, внешнюю относительно C_0. Поверхность C_0, имеющая постоянную температуру $\varphi_0 = 0$, изменяется со временем и образует семейство поверхностей C. Пусть $u^{(m)}(x, y, z, t)$ $(m = 1, 2)$ — температуры A_1 и) A_2, удовлетворяющие уравнениям теплопроводности

$$a_m^2 \Delta u^{(m)} = \frac{\partial u^{(m)}}{\partial t} \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

начальным условиям

$$u^{(m)}(x, y, z, t_0) = \Phi_m(x, y, z) \tag{2}$$

и граничным условиям на L

$$u^{(m)}(L) = 0; \tag{3}$$

Φ_m — непрерывные функции, определенные в областях $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$.

Обозначим через d семейство кривых, представляющих ортогональные траектории семейства поверхностей C, через $s(\alpha, \beta, t)$ — длину дуги кривой d, отсчитываемой от C_0 $(s(\alpha, \beta, t_0) = 0)$, через α, β — параметры, определяющие положение точки $M(x, y, z)$ на поверхности C.

Уравнения кривой d можно представить в виде

$$x = f(\alpha, \beta, s(\alpha, \beta, t)), \quad y = g(\alpha, \beta, s(\alpha, \beta, t)), \quad z = h(\alpha, \beta, s(\alpha, \beta, t)), \tag{4}$$

где функции f, g, h удовлетворяют условиям

$$f_t'^2 + g_t'^2 + h_t'^2 = s_t'^2; \quad f_t' f_\alpha' + g_t' g_\alpha' + h_t' h_\alpha' = 0; \quad f_t' f_\beta' + g_t' g_\beta' + h_t' h_\beta' = 0. \tag{4'}$$

Если t фиксированно, то (4) — уравнения поверхности C, а если α, β постоянны, то (4) — уравнения d.

Выражая тепловой баланс для каждой точки C, получим калориметрическое условие (условие Стефана)

$$\frac{ds}{dt} = e\left(k_1 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \nu} - k_2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \nu}\right)_{x=f(\alpha, \beta, s(\alpha, \beta, t))\ y=g,\ z=h} \tag{5}$$

$(e = 1/\rho\delta$, ν — внутренняя нормаль $C)$.

Задача Стефана состоит в следующем: найти функции $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, s, f, g, h, удовлетворяющие условиям (1), (2), (3), (4'), (5).

Сначала решим следующую вспомогательную задачу: найти функцию $u(x, y, z, t)$ в конечной простой области R (занятой телом A), ограниченной гладкою поверхностью C, которая изменяется по данному закону (4) (f, g, h — известные функции), если u удовлетворяет (1) (индекс m опускаем), начальному условию (2) и граничному условию (3) на C.

Разобьем для этого конечный интервал $t_0, t_0 + T$ на n частей моментами t_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), полагая $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, и рассмотрим поверхность C_{in}, которая в интервале $t_{i-1} < t < t_i$ неизменна и совпадает с поверхностью $C \equiv C(t_{i-1})$, а для $t = t_i$ она скачком переходит в положение $C(t_i)$. Таким образом в четырехмерном пространстве $OXYZt$ C заменяется «ступеньчатой» поверхностью C_{in}. Пусть u_{in} — температура области R_{in} в интервале Δt_i. Функция u_{in} определена условием $u_{in} = 0$ на неизменной границе C_{in} области R_{in} и начальным условием $u_{in}(M, t_{i-1}) = u_{i-1,\,n}(M, t_{i-1})$. Аналогично $u_{i-1,\,n}$ выражается через $u_{i-2,\,n}$ и т. д. до $u_{1n}(M, t_0) = \Phi$ (известная функция). Решение u_{in} уравнения (1) в интервале Δt_i выражается в виде ([2],[3])

$$u_{in}(x, y, z, t) = V_{in}(x, y, z, t) + W_{in}(x, y, z, t), \tag{6}$$

$$V_{in} = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi(t - t_{i-1})})^3} \iiint\limits_{R_{in}} u_{i-1,\,n}(\xi, \eta, \zeta, t_{i-1}) \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4a^2(t - t_{i-1})}\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{7}$$

$$W_{in} = \frac{1}{8a^3\pi^{3/2}} \int\limits_{t_{i-1}}^{t} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{5/2}} \int\limits_{C_{in}} \mu(\alpha, \beta, \tau - t_{i-1}) \exp\left[\frac{-r^2}{4a^2(t-\tau)}\right] r \cos(r\nu)\, d\sigma. \tag{8}$$

Здесь ν — внутренняя нормаль C_{in}; r — расстояние от точки $M'(\xi, \eta, \zeta)$ на C_{in} до точки $M(x, y, z)$ вне C_{in}; α, β — параметры, определяющие положения точек C_{in}; μ — неизвестная функция (плотность двойного теплового слоя).

Функция W_{in} (8) терпит разрыв на C_{in}, когда M пересекает C_{in} ([3]). В предельном выражении μ выходит за знак интеграла. Если обозначить через V_{in}^* значения V_{in} (7) на C_{in} и иметь в виду, что $u_{in} = 0$ на C_{in}, то это приводит к следующему интегральному уравнению для μ:

$$\mu(\alpha, \beta, t) + \frac{1}{8a^3\pi^{3/2}} \int\limits_{t_{i-1}}^{t} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{5/2}} \int\limits_{C_{in}} \mu(\alpha', \beta', \tau - t_{i-1}) \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right] r^3\, d\omega = -V_{in}^*(\alpha, \beta, t), \tag{9}$$

где $r = M'M$ (M находится на C_{in}); $d\omega$ — телесный угол, под которым из M' видны элементы C_{in}. Поставив перед интегралом в (9) множитель λ, можно найти решение в виде

$$\mu(\alpha, \beta, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p \mu_p(\alpha, \beta, t). \tag{10}$$

Функции μ_p определяются из (9). Ряд (10) сходится равномерно для конечного t. Подставляя найденное значение μ ($\lambda = 1$) в (6), получим u_{in}. Применение теоремы Грина ([4]) к четырехмерной области, созданной в пространстве $OXYZt$ телом A с изменяющейся границей

C, как и в двухмерном случае ([1]), приводит к заключению, что последовательность u_{in} имеет при $n \to \infty$ предел $u(x, y, z, t)$, удовлетворяющий условиям (1), (2), (3). Таким же образом найдем решение $u^{(1)}$ внешней задачи (для области $R^{(1)}$ вне C).

Теперь найдем решение задачи Стефана, определенной условиями (1), (2), (3), (5). Разобьем интервал $t_0, t_0 + T$ на n частей моментами t_i. В интервале $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ найдем, как выше, решения (1) $u_{1n}^{(1)}$ и $u_{1n}^{(2)}$ в $R_{1n}^{(1)}$ и $R_{1n}^{(2)}$ с начальными температурами Φ_1 и Φ_2 (2) и с значениями нуль на поверхности $C_0 = C(t_0)$, предполагаемой неизменной. Заменяя в условии (5), проинтегрированном по t, координаты x, y, z координатами x_0, y_0, z_0 фиксированной точки M_0 поверхности C_0, получим изменение $s_{1n}(\alpha, \beta, t)$ $(t_0 < t \leqslant t_1)$, которое нанесем по нормали к C_0 в точке M_0. Таким образом найдем точки M_1 новой гладкой поверхности C_{1n}. Рассматривая C_{1n} как неподвижную в интервале $t_2 - t_1$, получим новые решения $u_{2n}^{(1)}$, $u_{2n}^{(2)}$ и т. д. Для интервала Δt_i найдем решения $u_{in}^{(1)}$, $u_{in}^{(2)}$ уравнения (1) $(m = 1, 2)$ с начальными значениями $u_{in}^{(1)}(M, t_{i-1}) = u_{i-1,\,n}^{(1)}(M, t_{i-1})$, $u_{in}^{(2)}(M, t_{i-1}) = u_{i-1,\,n}^{(2)}(M, t_{i-1})$ и с значениями нуль на неизменной известной поверхности $C_{i-1,\,n}$. Заменив в условии (5), проинтегрированном по t, координаты x, y, z на координаты x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1} точки M_{i-1} поверхности $C_{i-1,\,n}$, найдем для изменения функции s выражение

$$s_{in}(\alpha, \beta, t) = s_{i-1,\,n}(\alpha, \beta, t_{i-1}) +$$

$$+ e \int_{t_{i-1}}^{t} \left(k_1 \frac{\partial u_{in}^{(1)}}{\partial \nu_i} - k_2 \frac{\partial u_{in}^{(2)}}{\partial \nu_i} \right)_{\substack{x = f_{in}(\alpha, \beta, s_{in}(\alpha, \beta, t_{i-1})) \\ y = g_{in}(\alpha, \beta, s_{in}(\alpha, \beta, t_{i-1})) \\ z = h_{in}(\alpha, \beta, s_{in}(\alpha, \beta, t_{i-1}))}} dt. \qquad (11)$$

По нормали ν_i контура $C_{i-1,\,n}$ в точке M_{i-1}, определенной известными функциями f_{in}, g_{in}, h_{in}, нанесем длину $\Delta s_{in} = s_{in}(\alpha, \beta, t) - s_{i-1,\,n}(\alpha, \beta, t_{i-1})$. Получим точки M_i новой гладкой поверхности C_i.

Для того чтобы имел место этот случай, выбираем всегда t в интервале $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, подчиненном неравенству $\Delta t_i < \Delta \bar{t}_i = \bar{t}_i - t_{i-1}$, где $\bar{t}_i$ — момент, в котором на изменяющейся поверхности C_i появится особая точка в зависимости от кривизны C_i или от начальных и граничных значений $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ (например, когда $\Delta s_{in} = r_i$, где r_i — меньший из двух главных радиусов кривизны C_i или когда C_i самопересекается). В действительности для нахождения лучшего приближения искомого решения надо выбирать $\Delta t_i \ll \Delta \bar{t}_i$, что гарантирует гладкость всех поверхностей C_i.

Таким образом построим последовательности функций $u_{in}^{(1)}$, $u_{in}^{(2)}$ s_{in}, f_{in}, g_{in}, h_{in}, дающих приближенное решение поставленной задачи. Граничным переходом $n \to \infty$ найдем точное ее решение.

Можно проверить, что в окрестности каждой точки M_0 контура $C(t_0)$ и для достаточно малого $\tau = t - t_0$ решение поставленной выше задачи переходит, с заданным приближением, в соответствующее решение линейной задачи (где $\nu_1 \equiv OX$). Используя результаты и метод линейной задачи, можно доказать, что для $t_0 < t \leqslant \tau$ задача имеет единственное решение и что построенные последовательности имеют пределы, являющиеся точными решениями задачи. Повторяя конечное число раз это рассуждение, получим, что для конечного интервала написанные выше последовательности имеют пределы, дающие точное и единственное решение задачи.

Можно дать различные обобщения задачи. Если $R^{(2)}$ — незамкнутая область, метод решения не изменяется. Пусть $R^{(2)}$ замкнута поверхностью C; $R^{(2)}$ находится в конечной двухсвязной области $R^{(1)}$, замкнутой неизменной поверхностью C_0, на которой даны граничные условия. Решение дается аналогичным способом. $u^{(2)}$ получим как выше, а для $u^{(1)}$ надо искать две функции μ_0 и μ на C_0 и C, для определения которых получим систему из двух интегральных уравнений вида (9). Если $R^{(1)}$ — многосвязная область, ограниченная p поверхностями, приходится отыскивать p функций μ_p посредством p интегральных уравнений вида (9). Изложенным методом можно без затруднений изучать исчезновение фазы или распад фазы на две или больше фаз, но эти рассуждения недостаточны для изучения случая появления фазы. Можно тоже освободиться от сделанного в начале предположения о гладкости поверхности C_0. Получается, что если C_0 имеет особенные точки, они сглаживаются в течение малого интервала времени, и потом решение можно строить данным способом. Для решения каждой из этих задач в практическом случае надо брать конечные интервалы и конечное n. Разумеется, приближение улучшается, когда n увеличивается и все Δt_i уменьшаются.

Софийский государственный университет
София, Болгария

Поступило
3 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Б. Дацев, ДАН, **101**, № 3 (1955). [2] С. Г. Михлин, Приложения интегральных уравнений, 1947. [3] Г. Мюнц, Интегральные уравнения, **1**, 1934. [4] С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, 1950.