Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 3

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР И. М. ГЕЛЬФАНД и А. Г. КОСТЮЧЕНКО

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ДРУГИХ ОПЕРАТОРОВ

1. В теории самосопряженных операторов известна общая теорема о разложении самосопряженного оператора по так называемому спектральному семейству E_λ. Однако в случае дифференциальных операторов эта теорема еще не приводит к разложению по собственным функциям, и разложение по собственным функциям проводилось лишь для отдельных классов самосопряженных дифференциальных операторов и каждый раз являлось предметом отдельного исследования ([1-5]) *.

В этой заметке будет доказана некоторая общая теорема об операторах, из которой, в частности, будут следовать практически все существенные теоремы о спектральном разложении самосопряженных дифференциальных операторов. Это разложение будет проводиться по обычным или, в случае отсутствия таковых, по обобщенным собственным функциям.

2. Рассмотрим линейное топологическое пространство Φ бесконечно дифференцируемых функций, в которое введена топология при помощи счетного числа норм. Например: 1) пространство S функций, убывающих вместе со всеми своими производными быстрее, чем $(1+x^2)^{-n}$, для любого n; 2) пространство бесконечно дифференцируемых функций S_M, удовлетворяющих неравенству $|\varphi^{(p)}(x)| \leqslant c_p M(x)$, где $M(x)$ — положительная интегрируемая с квадратом и монотонная при больших x функция; нормы задаются формулой $\|\varphi\|_n = \sup\limits_{x,p \leqslant n} |\varphi^{(p)}(x)| \cdot M^{-1}(x)$. При этом для каждого класса дифференциальных операторов мы будем далее подбирать свое пространство основных функций Φ (см. примеры, приведенные в конце заметки).

Обозначим через Φ' пространство линейных функционалов над Φ. Каждый такой функционал будем называть обобщенной функцией. Рассмотрим в пространстве Φ непрерывную положительно-определенную билинейную форму (φ, ψ) и примем ее за скалярное произведение. Обозначим через $\overline{\Phi}$ пополнение пространства Φ по скалярному произведению (φ, ψ). $\overline{\Phi}$ есть полное гильбертово пространство. Так как каждый элемент $\varphi \in \overline{\Phi}$ определяет линейный непрерывный в Φ функционал $T(\varphi) = (\overline{\varphi}, \varphi)$, то $\overline{\Phi} \subset \Phi'$, и, значит, между введенными нами пространствами имеет место соотношение $\Phi \subset \overline{\Phi} \subset \Phi'$.

Пусть A — оператор, определенный для всех $\varphi \in \Phi$ со значениями из $\overline{\Phi}$, т. е. $A\varphi \in \overline{\Phi}$ для $\varphi \in \Phi$. Мы потребуем, чтобы оператор A был

---

* Отметим, что М. Г. Крейн получил свои результаты при помощи интересного метода, так называемых направляющих функционалов ([7]).

В работе ([5]) Маутнер доказал возможность разложения по собственным функциям в более общем случае, а именно, для самосопряженных операторов, резольвента которых есть интегральный оператор с так называемым ядром Карлемана. Мы хотели бы также обратить внимание на интересную работу ([11]).

симметрическим, т. е. $(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$, непрерывным из Φ в $\overline{\Phi}$ и чтобы он мог быть расширен до гипермаксимального оператора $\overline{A}$.*

В дальнейшем мы для простоты будем предполагать, что значения оператора A для $\varphi \in \Phi$ принадлежат Φ. В этом случае сопряженный A' оператор переводит Φ' в себя. $\psi \in \Phi'$ называется обобщенной собственной функцией, если $A'\psi = \lambda\psi$. В общем случае (когда $A\Phi \subset \Phi$) мы, к сожалению, должны определить лишь как обобщенную функцию $\psi \in \Phi'$, полученную дифференцированием спектральной функции (см. теорему 1).

Теорема 1. *Если Φ — любое из введенных выше основных пространств, а A — симметрический оператор, определенный выше, то у этого оператора имеется полная система обобщенных собственных функций.*

Наметим коротко план доказательства теоремы. Считая оператор A расширенным до гипермаксимального, обозначим через E_λ его разложение единицы. Пусть $g^{(\alpha)}$ — система порождающих векторов, т. е. таких, что $E_\lambda g^{(\alpha)}$ порождают для каждого α подпространства, которые попарно ортогональны и заполняют в сумме все пространство. Мы можем при каждом λ рассматривать $E_\lambda g^{(\alpha)}$ не как элемент гильбертова пространства $\overline{\Phi}$, а как элемент пространства Φ', поскольку $\overline{\Phi} \subset \Phi'$. Мы докажем, что $E_\lambda g^{(\alpha)}$, рассматриваемая в Φ' как функция от параметра λ, будет иметь почти всюду производную по мере $\sigma^{(\alpha)}(\lambda) = (E_\lambda g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})$. Эта производная и будет обобщенной собственной функцией. Сама возможность дифференцирования вытекает из следующей леммы.

Лемма. *Пусть — Φ одно из введенных выше пространств, а g_λ — функционал из Φ', зависящий от λ, причем для каждого φ функция $g_\lambda(\varphi)$ является функцией ограниченной вариации. Тогда g_λ почти всюду дифференцируема относительно меры $\sigma(\lambda)$ по параметру λ*.**

Для доказательства леммы заметим сначала, что из ограниченности вариации функции $g_\lambda(\varphi)$ следует существование такого r, что функционалы g_λ принадлежат для всех λ пространству Φ'_r, сопряженному к нормированному пространству Φ_r***. При этом можно показать, что для g_λ выполняется следующее неравенство:

$$\sup\left(\|g_{\lambda_2} - g_{\lambda_1}\|_r + \cdots + \|g_{\lambda_n} - g_{\lambda_{n-1}}\|\right) \leqslant K \qquad (1)$$

для любой последовательности λ_i. Так как для абстрактных функций, удовлетворяющих неравенству (1), значения которых принадлежат пространству, сопряженному к нормированному и сепарабельному, доказано существование слабой производной (см. ([6]) или ([7])), то возможность дифференцирования $E_\lambda g^{(\alpha)}$ по мере $\sigma^{(\alpha)}(\lambda)$ доказана. Поскольку в пространстве Φ' слабая сходимость и сильная сходимость совпадают, то слабая производная будет и сильной. При этом, если $g_\lambda(\varphi)$ абсолютно непрерывна по $\sigma(\lambda)$, то имеет место также представление

$$g_\lambda = \int_{-\infty}^{\lambda} f_\lambda d\sigma(\lambda).$$

Применяя лемму к $g_\lambda^{(\alpha)} = E_\lambda g^{(\alpha)}$, мы получаем дифференцированием $g_\lambda^{(\alpha)}$ обобщенные собственные функции. Полнота системы обобщенных собственных функций следует из полноты системы $E_\lambda g^{(\alpha)}$.

Теорема 2. *Пусть $f_\lambda^{(\alpha)}$ — построенная в теореме* 1 *система*

* Нетрудно видеть, что это требование выполняется для любого вещественного симметричного дифференциального оператора, поскольку индексы дефекта у него равны.

** При этом в случае пространства S_M производная есть функционал в S_{M_1}, где $M_1(x)$ стремится к нулю быстрее на фиксированную степень от $|x|$.

*** Φ_r — пространство, полученное пополнением Φ по r-й норме.

обобщенных собственных функций. Тогда для любой основной функции $\varphi \in \Phi$ *существует преобразование Фурье*

$$c^{(\alpha)}(\lambda) = (f_\lambda^{(\alpha)}, \varphi), \quad \text{причем } (\varphi, \varphi) = \sum_\alpha \int |c^{(\alpha)}(\lambda)|^2 \, d\sigma^{(\alpha)}\lambda. \tag{2}$$

Эта формула служит также для установления изометричного соответствия между гильбертовым пространством $\overline{\Phi}$ *и пространством функций* $c^{(\alpha)}(\lambda)$, *если последнее замкнуть по скалярному произведению, написанному в правой части равенства* (2).

Для доказательства теоремы 2 заметим, что в общей теории самосопряженных операторов доказывается, что каждому вектору $f \in \overline{\Phi}$ отвечают функции $c^{(\alpha)}(\lambda)$, так что

$$f = \sum_\alpha \int c^{(\alpha)}(\lambda) \, dE_\lambda g^{(\alpha)} \quad \text{и} \quad (f_1, f_2) = \sum_\alpha \int c_1^{(\alpha)}(\lambda) \, c_2^{(\alpha)}(\lambda) \, d\sigma^{(\alpha)}(\lambda). \tag{3}$$

Если φ — основная функция, то надо доказать, что $c^{(\alpha)}(\lambda) = (f_\lambda^{(\alpha)}, \varphi)$. Для этого напишем на основании (3) и теоремы 1

$$(f_1, \varphi) = \sum_\alpha \int c_1^{(\alpha)}(\lambda) \; dE_\lambda \, (g^{(\alpha)}, \varphi) = \sum_\alpha \int c_1^{(\alpha)}(\lambda) \, \overline{(f_\lambda^{(\alpha)}, \varphi)} \, d\sigma^{(\alpha)}(\lambda).$$

Так как f_1 произвольно, то, сравнивая эту формулу с (3), в которую вместо f_2 подставлено φ, получаем $c^{(\alpha)}(\lambda) = (f_\lambda^{(\alpha)}, \varphi)$, что и требовалось доказать.

Приведем несколько примеров.

Во всех примерах дифференциальных операторов, если коэффициенты бесконечно дифференцируемы, то Φ переходит снова в Φ. Если же коэффициенты не бесконечно дифференцируемы, то под собственными функциями мы будем, как уже говорилось, понимать обобщенные функции (функционалы), являющиеся производными от $E_\lambda g$.

Пример 1. Рассмотрим обыкновенное уравнение 2 n-го порядка:

$$Ly \equiv y^{(2n)} + q_1 y^{(2n-1)} + \cdots + q_{2n} y = \lambda y, \tag{4}$$

где L — самосопряженный оператор и $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$.

Пусть коэффициенты q_i уравнения (4) удовлетворяют неравенствам $|q_i(x)| \leqslant c(1 + |x|^\beta)$. Введем пространство S_β бесконечно дифференцируемых функций φ, подчиняющихся условию $|\varphi^{(p)}(x)| \leqslant c_{p\varepsilon}(1 + |x|^{\beta + 1/2 + \varepsilon})^{-1}$, $\varepsilon > 0$. Рассмотрим оператор L над этим пространством. В силу доказанной теоремы 1 у уравнения (4) имеется полная система собственных функций, являющихся функционалами над пространством S_β. Отсюда следует:

Теорема 3. *Если коэффициенты* q_i *уравнения* (4) *удовлетворяют неравенствам* $|q_i(x)| < c(1 + |x|^\beta)$, *то существует полная система собственных функций* $y_i(x, \lambda)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *и такое* r, *что* r*-кратный интеграл от* $y_i(x, \lambda)$ *растет не быстрее, чем* $c(1 + |x|^{\beta + 3/2 + \varepsilon})$.

Если же функции $y_i(x, \lambda)$ не сильно осциллируют, что выполняется, например, при ограниченных q_i, то тогда и сами собственные функции растут не быстрее, чем $c(1 + |x|^{\beta + 3/2 + \varepsilon})$. Заметим, что для уравнения второго порядка близкую теорему доказал Э. Э. Шноль [8].

Рассмотрим теперь самосопряженный дифференциальный оператор A в частных производных, порожденный выражением

$$\sum a_{k_1 \ldots k_n}(x) \frac{\partial^{m_i}}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}, \quad x = (x_1 \ldots x_n), \quad -\infty \leqslant x_i \leqslant +\infty. \tag{5}$$

Пусть коэффициенты $a_{k_1 \ldots k_n}$ удовлетворяют неравенству:

$$|a_{k_1 \ldots k_n}(x)| \leqslant c(1 + |x|^\beta), \quad \text{где} \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}. \tag{6}$$

Оператор A будет определен на функциях $\varphi \in S_{\beta,n}$, где $S_{\beta,n}$ — совокупность функций $\varphi(x) = \varphi(x_1 \ldots x_n)$, удовлетворяющих неравенству $|\varphi^{p(x)}| \leqslant c_{p\varepsilon}(1 + |x|^{\beta+1/2n+\varepsilon})^{-1}$, где ε — любое число больше нуля.

Так как можно показать, что у эллиптического уравнения всякая обобщенная собственная функция есть настоящее решение, то имеет место:

Теорема 4. *Если у самосопряженного эллиптического оператора* (5) *коэффициенты удовлетворяют неравенству* (6), *то оператор A имеет полную систему собственных функций и (x, λ), у которых интеграл некоторого порядка r растет не быстрее, чем $c|x|^{\beta+1/2n+\varepsilon}$.*

Для более точного изучения поведения собственных функций на бесконечности надо вводить пространства типа S_L ([10]).

Пример 2. Пусть теперь L — произвольный самосопряженный дифференциальный оператор (не обязательно эллиптический) с непрерывными коэффициентами. Строя пространство S_M с функцией $M^{-1}(x)$, растущей быстрее, чем все коэффициенты, мы из теоремы 1 получаем следующую теорему:

Теорема 5. *Всякий самосопряженный дифференциальный оператор имеет полную систему обобщенных собственных функций.*

Ясно, что в силу теоремы 2 для обобщенных собственных функций справедливо равенство Парсеваля.

Пример 3. Пусть A и B — самосопряженные дифференциальные операторы, причем B — положительный дифференциальный оператор. Выберем функцию $M^{-1}(x)$, растущую быстрее, чем все коэффициенты операторов A и B. Пополним затем основное пространство $\Phi = S_M$ по скалярному произведению $(B\varphi, \psi)$* до полного гильбертова пространства. Тогда имеет место следующая теорема:

Теорема 6. *Если A и B — дифференциальные операторы, введенные выше, то уравнение $A + \lambda B = 0$ имеет полную систему обобщенных собственных функций, понимаемых как функционалы в пространстве* Φ.

В частности, такая система имеется у уравнения, которое рассматривали С. Л. Соболев и Р. Александрян ([9]): $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial z^2} = 0$.

Пример 4. Рассмотрим на компактном бесконечно дифференцируемом многообразии $\mathfrak{M}$ динамическую систему с инвариантной мерой σ, записанную в форме $x_i' = X_i(x_1 \ldots x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть Φ — пространство определенных на $\mathfrak{M}$ бесконечно дифференцируемых функций. Производящий оператор системы $L = i \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ является самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве функций H, определенных на $\mathfrak{M}$ и интегрируемых в квадрате по инвариантной мере σ.

Предположим, что оператор L определен на функциях $\varphi \in \Phi$. Тогда из теоремы 1 следует:

Теорема 7. *У динамической системы $\mathfrak{M}$ имеется полная система обобщенных собственных функций.*

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
16 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Weyl, Götting. Nachr., 37 (1909). [2] М. Г. Крейн, ДАН, **74**, 9 (1950). [3] K. Kodaira, Am. J. Math., **72**, 502 (1950). [4] А. Я. Повзнер, Матем. сборн., **32**, № 1 (1953). [5] F. Mautner, Proc. Nat. Acad. Sci., **39**, 49 (1953). [6] И. М. Гельфанд, Матем. сборн., **4**, (46) (1938). [7] М. Г. Крейн, ДАН, **53**, № 1 (1946). [8] Э. Э. Шноль, Усп. матем. наук, **9**, в. 4 (1954). [9] Р. А. Александрян, ДАН, **73**, № 4 (1950). [10] А. Г. Костюченко, ДАН, **103**, № 1 (1955). [11] L. Garding, Contes Rendus du Douzième Congrès des Math. Scandinaves, 44 (1953).

* Аналогично строится пространство, если уравнение задано в конечной области.