Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Д. И. ШЕРМАН

ОБ ИЗГИБЕ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ, ЧАСТИЧНО ЗАЩЕМЛЕННОЙ И ЧАСТИЧНО ОПЕРТОЙ ПО КОНТУРУ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 5 I 1955)

§ 1. Предположим, что пластинка с сечением в форме круга S радиуса R испытывает поперечный изгиб под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности q. Как обычно, срединную плоскость пластинки возьмем за плоскость комплексного переменного $z = x + iy$ и начало координат поместим в центре круга. Примем для простоты, что одна, например верхняя, полуокружность γ_1 границы γ пластинки с аффиксами концов $z = \pm R$ защемлена; другая же, нижняя, полуокружность γ_2 оперта*. В этом случае, отыскивая прогиб $w(x, y)$ срединной плоскости в виде суммы

$$w(x, y) = w^*(x, y) + \frac{q}{64D}(r^2 - R^2)^2, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{1}$$

где D — цилиндрическая жесткость, будем иметь для определения бигармонической функции $w^*(x, y)$ следующие краевые условия (2):

$$w^* = 0, \quad \frac{dw^*}{dn} = 0 \quad \text{на } \gamma_1; \quad w^* = 0, \quad G(w^*) = -\frac{1}{8}\frac{q}{D}R^2 \quad \text{на } \gamma_2, \tag{2}$$

где положено (σ — коэффициент Пуассона, ϑ — угол нормали к γ с осью абсцисс и Δ — оператор Лапласа)

$$G(w^*) = \sigma\Delta w^* + (1 - \sigma)\left\{\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}\cos^2\vartheta + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}\sin^2\vartheta + 2\frac{\partial^2 w^*}{\partial x\,\partial y}\sin\vartheta\cos\vartheta\right\}. \tag{3}$$

Здесь целесообразно искать $w^*(x, y)$ в форме

$$w^*(x, y) = u(x, y) + (r^2 - R^2)\,v(x, y), \tag{4}$$

где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — некоторые гармонические функции. Из условий (2) для $w^*(x, y)$ ясно, что $u(x, y)$, тождественно равна нулю в области S. Другая функция $v(x, y)$ подлежит определению**, для нее из тех же равенств (2) имеем смешанные предельные условия:

$$v = 0 \quad \text{на } \gamma_1; \qquad 2(1 + \sigma)\,v + 4R\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{8}\frac{q}{D}R^2 \quad \text{на } \gamma_2. \tag{5}$$

Пусть $\varphi(z)$ — регулярная в круге S функция с вещественной частью, равной $v(x, y)$. Тогда, в силу (4), после элементарных преобразований будем иметь (t — аффикс точки γ)

$$\begin{aligned} &(1 + \sigma)\{\varphi(t) + \overline{\varphi(t)}\} + 2\{\bar{t}\,\overline{\varphi'(t)} - t\varphi'(t)\} = 0 \quad \text{на } \gamma_1; \\ &(1 + \sigma)\{\varphi(t) + \overline{\varphi(t)}\} + 2\{\bar{t}\,\overline{\varphi'(t)} - t\varphi'(t)\} = -\frac{1}{8}\frac{q}{D}R^2 \quad \text{на } \gamma_2. \end{aligned} \tag{6}$$

* В общем случае для произвольных областей эта задача при помощи интегральных уравнений решена А. И. Каландия (1).

** Сведение задачи при помощи представления (4) к одной неизвестной гармонической функции было в свое время выполнено И. Х. Хациревичем.

Умножим эти равенства на ядро $\{2\pi i(t-z)\}^{-1}$, где z — произвольная точка, лежащая в S, и проинтегрируем каждое из них по соответственной полуокружности γ_k $(k=1, 2)$. Сложив вновь полученные равенства и совершив затем предельный переход $z \to t_0$ на γ_2, придем к сингулярному уравнению (с интегралом в смысле главного значения по Коши):

$$(1+\sigma)\,\varphi(t_0) + \frac{2}{\pi i}\int\limits_{\gamma_2} \frac{t\varphi'(t)}{t-t_0}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{16\pi i}\frac{q}{D}R^2 \ln\frac{R-t_0}{-R-t_0} - (1+\sigma)\,\overline{\varphi(0)}. \qquad (7)$$

Обозначим через a_k коэффициенты разложения $\varphi(z)$ в ряд Тэйлора по степеням t/R; первый из них a_0 можно считать вещественным. Введем далее в уравнение (7) вместо $\varphi(z)$ функцию $\varphi^*(z) = \varphi(z) - a_0$, принимающую нулевое значение в начале координат, и обратим его общеизвестным способом ([3]) относительно $t\varphi^{*\prime}(t)$. Тогда после сравнительно простых вычислений и преобразований найдем на γ_2 ($\sqrt{R^2-t^2} > 0$ для вещественных $t < R$)

$$t_0\varphi^{*\prime}(t_0) + \frac{1+\sigma}{2\pi i}\frac{t_0}{\sqrt{R^2-t_0^2}}\int\limits_{\gamma_2}\varphi^*(t)\sqrt{R^2-t^2}\,\frac{dt}{t-t_0} =$$

$$= -\frac{1}{32}\frac{q}{D}R^2 + \frac{1}{\sqrt{R^2-t_0^2}}\Big[-i\left\{\frac{1}{32}\frac{q}{D}R^2 + (1+\sigma)\,a_0\right\}t_0 +$$

$$+\left\{\frac{1}{16\pi}\frac{q}{D}R^3 + (C-E)\right\}\Big], \qquad (8)$$

причем C — некоторая постоянная и

$$E = \frac{1+\sigma}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\varphi^*(t)\,\frac{\sqrt{R^2-t^2}}{t}\,dt.$$

Нетрудно видеть, что левая часть равенства (8) является контурным значением некоторой функции, регулярной в круге и равной нулю в его центре. Следовательно, таковой должна быть и правая часть равенства. Поэтому $C - E = \frac{1}{32}\frac{q}{D}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)R^3$. Учитывая это соотношение, окончательно получим следующее сингулярное уравнение:

$$\varphi^{*\prime}(t_0) + \frac{1+\sigma}{2\pi i}\frac{1}{\sqrt{R^2-t_0^2}}\int\limits_{\gamma_2}\varphi^*(t)\sqrt{R^2-t^2}\,\frac{dt}{t(t-t_0)} =$$

$$= iA_0\frac{1}{\sqrt{R^2-t_0^2}} + A_1\frac{1}{t_0}\left\{\frac{R}{\sqrt{R^2-t_0^2}} - 1\right\}, \qquad (9)$$

где A_0 и A_1 — постоянные, равные: $A_0 = -\left\{\frac{1}{32}\frac{q}{D}R^2 + (1+\sigma)\,a_0\right\}$, $A_1 = \frac{1}{32}\frac{q}{D}R^2$.

§ 2. Подставим в интеграл, заключающийся в (9), вместо функции $\varphi^*(z)$ ее разложение в ряд Тэйлора; кроме того, предположим, что ряд, составленный из членов $a_k(t/R)^k\sqrt{R^2-t^2}$, можно интегрировать почленно (законность этого допущения ясна из дальнейшего). Тогда, проделав несложные выкладки, получим на γ_2 $(t_0 \neq \pm R)$

$$\frac{1}{\pi i}\frac{1}{\sqrt{R^2-t_0^2}}\int\limits_{\gamma_2}\varphi^*(t)\,\frac{\sqrt{R^2-t^2}}{t(t-t_0)}\,dt = \frac{i}{R}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{t_0}{R}\right)^m \sum_{k=1,\,2}^{*\infty} a_k g_{k,m}, \qquad (10)$$

где звездочка при внутренней сумме указывает, что ее индекс принимает значения одинаковой четности с m; $g_{k,m}$ — вещественная величина, положительная при $k \leqslant m$ и отрицательная при $k \geqslant m+2$, равная:

$$g_{k,m} = \sum_{\nu=0,1}^{N(k,m)*} (-1)^{\frac{m-\nu}{2}} (-1)^{\frac{k-\nu}{2}} C^{\frac{m-\nu}{2}}_{-1/2} C^{\frac{k-\nu}{2}}_{1/2}, \qquad (11)$$

причем за верхний предел $N(k, m)$ берется наименьшее из чисел k и m.

При помощи вполне очевидных соображений можно вывести, например, для нечетных k и m рекуррентные соотношения

$$g_{k,m} = g_{k-2,m-2} + g_{1,m} g_{k,1}; \quad g_{k,m} = g_{k-1,m-1}. \qquad (12)$$

Имея их в виду, нетрудно показать, что

$$g_{2k,2m} = \frac{2m+1}{2(m-k)+1} (-1)^k C^k_{-1/2} (-1)^m C^m_{-1/2}. \qquad (13)$$

Положив $a_{2k} = \alpha_{2k}$ и $a_{2k+1} = i\alpha_{2k+1}$, где α_k — вещественные постоянные, получим на основании (9) для коэффициентов α_k бесконечную систему нормального типа:

$$\alpha_{2m+\nu+1} + (-1)^\nu \frac{1+\sigma}{2} \frac{1}{(2m+\nu+1)} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k-\nu} g_{2k-\nu,\,2m+\nu} =$$
$$= A_\nu (-1)^{m+\nu} C^{m+\nu}_{-1/2} \quad (\nu = 0, 1;\ m = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (14)$$

Исключив из нее α_{2k}, будем иметь относительно неизвестных α_{2k-1} $(k = 1, 2, \ldots)$ систему

$$\alpha_{2\nu-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n-1} \delta_{2n-1,\,2\nu-2} = A_0 p_{2\nu-1} - A_1 q_{2\nu-1} \ (\nu = 1, 2, \ldots), \qquad (15)$$

где $p_{2\nu-1}$ и $q_{2\nu-1}$ — заданные величины и коэффициенты

$$\delta_{2n-1,\,2\nu-2} = \left(\frac{1+\sigma}{2}\right)^2 \frac{1}{(2\nu-1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} g_{2k,\,2\nu-2} g_{2n-1,\,2k-1}. \qquad (16)$$

Для $\nu > 1$ справедливо неравенство (постоянная M не зависит от ν)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\delta_{2n-1,\,2\nu}) < M \frac{(\ln \nu)^2}{\nu \sqrt{\nu}}.$$

Из равенств (12) и (13) немедленно вытекает справедливость соотношений $\delta_{2n-1,\,2\nu} = \delta_{2\nu+1,\,2n-2}$; они позволяют вдвое сократить вычислительную работу при составлении таблицы коэффициентов как угодно усеченной системы (15).

Докажем, что система (14) вполне регулярна. Чтобы убедиться в этом, необходимо установить, что обе величины

$$g^{(\nu)}_m = \frac{1+\sigma}{2} \frac{1}{(2m+1+\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} |g_{2k-\nu,\,2m+\nu}| \quad (\nu = 0, 1) \qquad (17)$$

при любом фиксированном m существенно меньше единицы. Проведем рассуждения для первой из величин.

Функцию $\varphi^*(t)$ при коэффициентах разложения

$$a_k = \beta^k, \quad k \leqslant m; \qquad a_k = -\beta^k, \quad k \geqslant m+2; \qquad 0 < \beta < 1, \qquad (18)$$

назовем $\omega^*(t)$; ее можно записать так:

$$\omega^*(t) = \beta^2 \frac{(t/R)^2}{1-\beta^2 (t/R)^2} \{1 - 2\beta^m (t/R)^m\}. \qquad (19)$$

В этом случае интеграл в левой части (10) может быть непосредственно вычислен.

Выполнив кроме того некоторые дополнительные выкладки, приравняем в (10) коэффициенты при m-й степени переменной t/R. В результате получим

$$-(-1)^{m/2}C_{-1/2}^{m/2}+2\sum_{\nu=0}^{m/2}(-1)^{\nu}C_{-1/2}^{\nu}\sum_{k=0}^{\nu}(-1)^{k}C_{1/2}^{k}\beta^{m+2(k-\nu)}-$$

$$-\sqrt{1-\beta^2}\sum_{\nu=0}^{m/2}(-1)^{\nu}C_{-1/2}^{\nu}\beta^{m-2\nu}=\sum_{k=2}^{\infty}{}^{*}\beta^{k}\,|\,g_{k,\,m}\,|.$$

Наконец, устремляя $\beta\to 1$, что возможно в силу свойств $g_{k,\,m}$, вытекающих из (13), придем к соотношению

$$\sum_{k=2}^{\infty}{}^{*}\,|\,g_{k,\,m}\,|=-(-1)^{m/2}C_{-1/2}^{m/2}+2\sum_{\nu=0}^{m/2}(C_{-1/2}^{\nu})^2. \tag{20}$$

Поступая подобным образом, будем иметь для нечетного индекса m сходное с предыдущим равенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}^{*}\,|\,g_{k,\,m}\,|=2\sum_{\nu=0}^{\frac{m-1}{2}}(C_{-1/2}^{\nu})^2. \tag{21}$$

Отсюда посредством весьма простых оценок нетрудно убедиться в справедливости высказанного предложения относительно $g_m^{(\nu)}$. Итак, система (14) вполне регулярна. Тем более является вполне регулярной система (15)*.

Укоротив, исходя из соображений требуемой точности расчета, систему (15), найдем должное число неизвестных $\alpha_{2\nu-1}$. Соответствующее число $\alpha_{2\nu}$ возьмем из второй системы (14).

Коэффициент a_0, входящий в A, находится из условия конечности нормальной производной $\partial v/\partial r$ в точках $t=\pm R$. Это условие выглядит так:

$$\frac{1+\sigma}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\beta_{\nu}+A+B=0,$$

где β_ν — постоянные, определяемые через α_ν равенством

$$\beta_{\nu}=\sum_{k=E_1(\nu)}^{\infty}{}^{*}(-1)^{\frac{k-\nu}{2}}C_{1/2}^{\frac{k-\nu}{2}}\alpha_k;\quad E_1(0)=2,\quad E_1(\nu)=\nu.$$

Примечание. В том случае, когда дуга γ_2 не является полуокружностью, представляется целесообразным сперва подвергнуть уравнение (9) дробно-линейному преобразованию, переводящему γ_2 в полуокружность. После этого решение задачи можно получить, следуя с незначительными изменениями приему, указанному выше.

Институт механики
Академии наук СССР

Поступило
4 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Каландия, Прикладн. матем. и мех., **16**, в. 3 (1952). [2] Клеменс Шефер, Теоретическая физика, **1**, ч. 2, Механика сплошных сред, 1936. [3] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные уравнения, 1946.

* Изложенный в общих чертах способ исследования может оказаться полезным и в некоторых других задачах теории упругости, сводящихся к бесконечной системе при помощи процесса, аналогичного воспроизведенному. Чтобы при этом добиться возможно более точных оценок, необходимо, вообще говоря, в каждом отдельном случае знать закон изменения знака коэффициентов системы.