Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

И. И. ГОЛЬДЕНБЛАТ

К ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

(Представлено академиком Л. И. Седовым 5 I 1955)

1. В настоящей статье излагается теория малых упруго-пластических деформаций анизотропных сред, являющаяся естественным обобщением современной теории малых упруго-пластических деформаций изотропных сред.

Мы будем пользоваться прямоугольной прямолинейной (декартовой) системой координат, оси которой перенумерованы. Составляющие тензоров напряжений и деформаций будем обозначать через σ_{ik} и ε_{ik}, соответственно.

В дальнейшем нам понадобятся следующие инварианты:

$$\delta_{ik}\sigma_{ik} = \Pi_1, \quad \sigma_{ik}\sigma_{ik} = \Pi_2, \quad \sigma_{ik}\varepsilon_{ik} = T_2,$$
$$\delta_{ik}\varepsilon_{ik} = I_1, \quad \varepsilon_{ik}\varepsilon_{ik} = I_2. \tag{1}$$

Уравнения теории малых упруго-пластических деформаций изотропных сред могут быть записаны в одной из следующих форм ([1–2]):

$$\sigma_{ik} = \frac{\Pi_1}{3}\delta_{ik} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3\Pi_2 - \Pi_1^2}{3I_2 - I_1^2}}\,(3\varepsilon_{ik} - I_1\delta_{ik}),$$
$$\Pi_1 = KI_1, \quad 3\Pi_2 - \Pi_1^2 = f(3I_2 - I_1^2) \tag{2}$$

или

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{3I_2 - I_1^2}[(\Pi_1 I_2 - T_2 I_1)\delta_{ik} + (3T_2 - \Pi_1 I_1)\varepsilon_{ik}],$$
$$\Pi_1 = KI_1, \quad T_2 = \frac{K}{3}I_1^2 + \sqrt{f(3I_2 - I_1^2)(3I_2 - I_1^2)}\,. \tag{3}$$

Обе формы математически полностью эквивалентны.

Заметим, что функция f должна иметь различный вид для процесса нагружения и процесса разгрузки, так как в этом собственно и проявляется явление пластичности.

Как известно, теория малых упруго-пластических деформаций получила хорошее экспериментальное подтверждение в макроскопическом масштабе для многих материалов, если в процессе нагружения отношения между внешними силами оставались постоянными и если влияние времени и температуры было достаточно мало и можно было его не учитывать.

Первую из приведенных выше форм уравнений теории малых упруго-пластических деформаций чаще записывают в виде

$$\sigma_{ik} - \sigma\delta_{ik} = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{e_i}(\varepsilon_{ik} - e\delta_{ik}); \quad \sigma = Al;$$
$$\sigma_i = \varphi(e_i) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{f\left(\frac{9}{2}e_i^2\right)}, \tag{4}$$

где $\sigma = \frac{\Pi_1}{3}$; $e = \frac{I_1}{3}$; $\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3\Pi_2 - \Pi_1^2}$; $e_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{3I_2 - I_1^2}$.

Для наших целей, однако, будет более удобна приведенная выше вторая форма уравнений (3).

Отметим теперь, что из структуры уравнений (2) или (3) вытекает существование потенциала деформации, т. е. эти уравнения могут быть записаны в виде

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ik}}. \tag{5}$$

В самом деле, для этого в качестве потенциала достаточно взять функцию

$$F = \frac{1}{6}KI_1^2 + \frac{1}{6}\int_0^{3I_2 - I_1^2}\sqrt{\frac{f(x)}{x}}\,dx. \tag{6}$$

2. Для описания процесса малых упруго-пластических деформаций анизотропных сред введем тензор анизотропии $A_{ik,pq}$, обладающий следующими свойствами симметрии:

$$\begin{aligned} &A_{ik,pq} = A_{ki,pq}; \quad A_{ik,pq} = A_{ik,qp};\\ &A_{ik,pq} = A_{ki,qp}; \quad A_{ik,qp} = A_{ki,pq};\\ &A_{ik,pq} = A_{pq,ik} = A_{qp,ik} = A_{qp,ki}. \end{aligned} \tag{7}$$

Теория малых упруго-пластических деформаций анизотропных сред, очевидно, должна быть построена таким образом, чтобы существовал потенциал деформации (поскольку он существует в случае изотропных сред) и чтобы при замене тензора анизотропии $A_{ik,\,pq}$ тензором с постоянными составляющими, т. е. при замене

$$A_{ik,\,rs} = {}^1\!/_2\,(\delta_{ir}\delta_{ks} + \delta_{kr}\delta_{is}), \tag{8}$$

уравнения теории малых упруго-пластических деформаций анизотропных сред обращались в соответствующие уравнения для изотропных сред.

Введем следующие инварианты:

$$\overset{*}{I}_1 = A_{ikrs}\varepsilon_{rs}\delta_{ik} = A_{ikrs}\varepsilon_{ik}\delta_{rs}, \quad \overset{*}{I}_2 = A_{ikrs}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{rs}. \tag{9}$$

Очевидно, если тензор $A_{ik,\,rs}$ принимает значения (8), инварианты $\overset{*}{I}_1$ и $\overset{*}{I}_2$ превращаются в инварианты I_1 и I_2.

Положим

$$\sigma_{ik} = \psi_0 A_{ikrs}\delta_{rs} + \psi_1 A_{ikrs}\varepsilon_{rs}. \tag{10}$$

Умножив (10) на δ_{ik} и ε_{ik} и просуммировав по i и k, получим *

$$\Pi_1 = \alpha\psi_0 + \overset{*}{I}_1\psi_1, \quad T_2 = \overset{*}{I}_1\psi_0 + \overset{*}{I}_2\psi_1. \tag{11}$$

---

* Постоянная $\alpha = A_{ikrs}\delta_{ik}\delta_{rs}$.

Разрешив (11) относительно ψ_0 и ψ_1 и подставив в (10), получим

$$\sigma_{ik} = \frac{\Pi_1 \overset{*}{I}_2 - T_2 \overset{*}{I}_1}{\alpha \overset{*}{I}_2 - \overset{*}{I}_1^2} A_{ikrs}\delta_{rs} + \frac{\alpha T_2 - \Pi_1 \overset{*}{I}_1}{\alpha \overset{*}{I}_2 - \overset{*}{I}_1^2} A_{ikrs}\varepsilon_{rs}, \quad i, k = 1, 2, 3. \tag{12}$$

Для того чтобы связи между σ_{ik} и ε_{ik} стали вполне определенными, необходимо еще задание функций

$$\Pi_1 = \Pi_1(\overset{*}{I}_1, \overset{*}{I}_2), \quad T_2 = T_2(\overset{*}{I}_1, \overset{*}{I}_2), \tag{13}$$

причем эти функции должны быть заданы таким образом, чтобы уравнения (12) допускали существование потенциала деформации $F(\overset{*}{I}_1, \overset{*}{I}_2)$. Итак, должно быть

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ik}} = \frac{\partial F}{\partial \overset{*}{I}_1} A_{ikrs}\delta_{rs} + 2\frac{\partial F}{\partial \overset{*}{I}_2}\varepsilon_{ik}. \tag{14}$$

Сравнивая (14) и (12), имеем

$$\frac{\partial F}{\partial \overset{*}{I}_1} = \frac{\Pi_1 \overset{*}{I}_2 - T_2 \overset{*}{I}_1}{\alpha \overset{*}{I}_2 - \overset{*}{I}_1^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial \overset{*}{I}_2} = \frac{1}{2}\frac{\alpha T_2 - \Pi_1 \overset{*}{I}_1}{\alpha \overset{*}{I}_2 - \overset{*}{I}^2}, \tag{15}$$

Потребовав выполнения

$$\frac{\partial}{\partial \overset{*}{I}_2}\left(\frac{\partial F}{\partial \overset{*}{I}_1}\right) = \frac{\partial}{\partial \overset{*}{I}_1}\left(\frac{\partial F}{\partial \overset{*}{I}_2}\right), \tag{16}$$

получим

$$\left(\frac{1}{2}\overset{*}{I}_1\frac{\partial}{\partial \overset{*}{I}_1} + \overset{*}{I}_2\frac{\partial}{\partial \overset{*}{I}_2} + \frac{1}{2}\right)\Pi_1 = \left(\frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial \overset{*}{I}_1} + \overset{*}{I}_1\frac{\partial}{\partial \overset{*}{I}_2}\right)T_2. \tag{17}$$

Итак, одна из функций (13) может быть произвольной, другая должна удовлетворять дифференциальному уравнению (17).

Система уравнений (12), (13) и (17) образует полную систему уравнений теории малых упруго-пластических деформаций анизотропных сред.

В частности, если

$$\Pi_1 = K\overset{*}{I}_1, \tag{18}$$

то из (17) получим

$$T_2 = \frac{k}{\alpha}\overset{*}{I}_1^2 + \varphi(\alpha \overset{*}{I}_2 - \overset{*}{I}_1^2). \tag{19}$$

Если дополнительно положить

$$A_{rsnm} = {}^1/_2(\delta_{rn}\delta_{sm} + \delta_{sn}\delta_{rm}), \tag{20}$$

то уравнения (12), (18) и (19) превратятся в соответствующие уравнения для изотропных сред, т. е. в уравнения (3). В общем случае тензор $A_{ik,\,rs}$ не является тензором с постоянными составляющими и уравнения (12), (13) и (17) описывают малые упруго-пластические деформации анизотропных сред.

3. Положим, что уравнения (18) и (19) имеют вид

$$\Pi_1 = (\alpha\lambda + \mu)\overset{*}{I}_1, \quad T_2 = \lambda\overset{*}{I}_1^2 + \mu\overset{*}{I}_2. \tag{21}$$

Подставив (21) в (12), получим уравнения линейной теории упругости анизотропных сред

$$\sigma_{ik} = [\lambda A_{ikpq}A_{rsnm}\delta_{nm}\delta_{pq} + \mu A_{ikrs}]\varepsilon_{rs}, \quad i, k = 1, 2, 3. \tag{22}$$

Итак, составляющие тензора модулей упругости следующим образом выражаются через составляющие тензора анизотропии A_{ikrs}:

$$E_{ikrs} = \lambda A_{ikpq} A_{rsnm} \delta_{pq} \delta_{nm} + \mu A_{ikrs}. \tag{23}$$

Положив $A_{ikrs} = {}^1/_2 (\delta_{ir}\delta_{sk} + \delta_{kr}\delta_{is})$ в (23), получим тензор модулей упругости для изотропных сред, при этом λ и μ приобретают смысл коэффициентов Ляме.

4. В предыдущем параграфе было указано, что составляющие тензора модулей упругости E_{ikrs} линейно упругих сред могут быть выражены через составляющие тензора анизотропии A_{ikrs} (формула (23)).

Итак, если задан тензор анизотропии A_{ikrs}, то составляющие тензора модулей упругости E_{ikrs} однозначно выражаются через составляющие этого тензора (т. е. тензора A_{ikrs}). Обратное, вообще говоря, не имеет места. Однако, очевидно, любой тензор A_{ikrs}, удовлетворяющий уравнению (23), приводит к одной и той же связи между напряжениями и деформациями. Следует напомнить также, что тензор A_{ikrs} обладает теми же самыми свойствами симметрии, что и тензор E_{ikrs}.

Итак, тензор модулей упругости E_{ikrs} допускает не одно представление, а серию эквивалентных представлений при помощи тензора A_{ikrs}. Все решения уравнения (23) образуют эту серию эквивалентных представлений тензора E_{ikrs}.

Отметим в заключение, что в пластической области тензор A_{ikrs} никакой связи с тензором модулей упругости E_{ikrs} не имеет и, разумеется не должен удовлетворять уравнению (23).

Центральный научно-исследовательский
институт промсооружений

Поступило
3 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Ильюшин, Пластичность, 1948. [2] И. И. Гольденблат, Некоторые вопросы теории упруго-пластических деформаций, 1950.