Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 4

ГИДРОМЕХАНИКА

В. Г. ЛЕВИЧ

О ВЛИЯНИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА ВОЗБУЖДЕНИЕ И ЗАТУХАНИЕ ВЕТРОВЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 22 XII 1954)

Целью работы будет вычисление амплитуды волн на поверхности воды, считая заданной скорость ветра U_0 непосредственно над водной поверхностью.

Передача энергии от воздушного потока к жидкости рассматривалась рядом исследователей ([1–3]). Полная ясность в физический механизм передачи была внесена П. Л. Капицей ([4]).

Для гравитационных волн, амплитуда которых a мала по сравнению с длиной волны λ, П. Л. Капицей было получено выражение средней за период мощности, передаваемой поверхности жидкости:

$$\overline{W} = k_f \rho' (U_0 - c)^2 a^2 c k^2 S = k_f \rho' (U_0 - \sqrt{g\lambda})^2 \frac{\sqrt{g\lambda}}{\lambda^2} a^2 S, \qquad (1)$$

где черта означает усреднение за период; k_f — числовой коэффициент сопротивления; $k = 1/\lambda$; $\lambda = \lambda / 2\pi$; S — поверхность жидкости; ρ' — плотность газа; c — фазовая скорость волны.

Диссипируемая мощность при весьма малых амплитудах волн может быть написана в виде

$$F = \mu \int \overline{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2} dV = 2\rho\nu \frac{g}{\lambda^2} a^2 S \qquad (2)$$

для маловязкой жидкости, для которой выполнено условие ([5])

$$\frac{\nu}{\sqrt{g}} \frac{1}{\lambda^{3/2}} \ll 1; \qquad (3)$$

здесь ρ — плотность жидкости, ν и μ — соответственно, кинематическая и динамическая вязкость.

Приравнивая $\overline{W}$ и F, находим условие стационарного режима, полученное П. Л. Капицей. Им было показано, что последнее может быть выполнено при скорости ветра $U_0 > (U_0)_{\min} = 3 (\pi\mu g / 2\rho k_f)^{1/3}$. Сравнение вычисленного значения $(U_0)_{\min}$ с экспериментальным его значением показывает, что $k_f \sim 1$.

При увеличении амплитуды волн в жидкости возникает турбулентное движение, с которым связана основная диссипация энергии. Наличие свободной поверхности оказывает гасящее действие на турбулентные пульсации ([6]). Волновое движение на поверхности, даже при весьма больших числах Рейнольдса, имеет более или менее систематический характер, представляя совокупность чередующихся волн. Если бы скорости турбулентных пульсаций были сравнимы со скоростями среднего движения, то на поверхности наблюдались бы совер-

шенно беспорядочные выбросы жидкости, подобные тем, которые происходят на поверхности кипящей жидкости.

Наибольшие скорости турбулентных пульсаций, если они стабилизируются полем тяжести, должны удовлетворять условию

$$\rho g a \gg \rho v^2_{\text{турб}}. \tag{4}$$

Напишем выражение для энергии, диссипируемой при турбулентном движении жидкости, в виде:

$$\overline{F} \cong \rho \int \nu_{\text{турб}} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 dV = \beta\rho \int l^2 \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 dV. \tag{5}$$

Турбулентная вязкость представлена в обычном для теории турбулентности виде $\nu_{\text{турб}} = \beta l \left|\partial v / \partial y\right|$, где l — длина пути смешения.

Длина пути смешения, обычно определяемая из соображений размерности, в случае волнового движения на поверхности жидкости может быть определена на основе следующих соображений:

1) она не может зависеть от длины волны λ, поскольку последняя представляет фазовую кинематическую характеристику движения*;

2) из соображений размерности следует, что l может линейно зависеть от расстояния до поверхности;

3) по мере приближения к поверхности жидкости пути, проходимые турбулентными пульсациями, не должны обращаться в нуль, как это имеет место вблизи твердой поверхности, но по порядку величины должны совпадать с путями, проходимыми жидкими частицами, совершающими осредненное движение, т. е. при $y = 0$ $l \sim a$. Поэтому

$$l = y + a. \tag{6}$$

Формула (6) идентична с выражением для пути смешения вблизи шероховатой твердой поверхности с размером шероховатости a. Аналогия эта становится вполне прозрачной, если перейти к системе отсчета, в которой воздух неподвижен, а движется жидкость. В этой системе отсчета движение жидких частиц будет сходно с движением частиц в жидкости, обтекающей на поверхности шероховатости масштаба амплитуды волн. Необходимо подчеркнуть, что, как будет видно из дальнейших вычислений, их результат не очень чувствителен к сделанным предположениям.

Подставляя l в (5) и полагая $v \simeq a\omega e^{-ky} \cos(kx - \omega t)$, получаем для средней за период диссипации энергии во всем объеме жидкости:

$$\overline{F}_{\text{турб}} \simeq \frac{1}{6} \beta\rho a^5 g^{3/2} \frac{1}{\lambda^{7/2}} S. \tag{7}$$

При этом мы ограничивались членами первого порядка малости по отношению a/λ. С этой степенью точности формула (7) получается и при других выражениях для l, например $l \sim a(y)$, где $a(y)$ — амплитуда волнового движения на глубине y.

Приравнивая диссипируемую мощность (7) и мощность, поставляемую ветром (1), находим

$$a = \left(\frac{6k_f}{\pi\beta} \frac{\rho'}{\rho g}\right)^{1/3} \sqrt[3]{(U_0 - \sqrt{g\lambda})^2 \lambda^2}. \tag{8}$$

---

* Примечание при корректуре. В работе [11] высказано предположение $\lambda \sim l$. Легко показать, что это предположение приводит к неразумному выражению для зависимости амплитуды a от λ.

Формула (8) показывает, что при данной скорости ветра на поверхности жидкости может стационарно существовать спектр волн ($0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{max} = U_0^2/g$).

Каждой длине волны отвечает амплитуда на поверхности, определяемая формулой (8). Вид спектра $a(\lambda)$ изображен на рис. 1.

Максимальная амплитуда равна

$$a_{max} \simeq 0{,}4 \left(\frac{k_f}{\beta}\right)^{1/3} \frac{U_0^2}{10g}. \tag{9}$$

Длина волны, отвечающая максимальной амплитуде,

$$\lambda_{a_{max}} = \frac{8\pi}{9} \frac{U_0^2}{g}. \tag{10}$$

Скорость распространения волн с максимальной амплитудой

$$c_{a_{max}} = 0{,}67 U_0. \tag{11}$$

Отношение

$$\frac{a_{max}}{\lambda_{a_{max}}} \sim 0{,}01 \sqrt[3]{\frac{k_f}{\beta}}. \tag{12}$$

Переходя к сравнению с экспериментом, укажем прежде всего, что при данной скорости ветра U_0 действительно имеется спектр волн с довольно четко выделенным максимумом. Достоверных данных о характере этого спектра, повидимому, нет.

Опытные данные Корниша ([7]) и Шотта ([8]), основанные на обширном экспериментальном материале и относящиеся к установившимся режимам волн, показывают, что волны с максимальной амплитудой имеют фазовую скорость

$$c_{a_{max}} = (0{,}7—0{,}8)\, U_0. \tag{13}$$

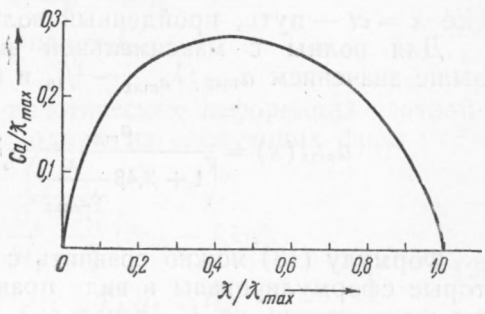


Рис. 1. $C = \left(\frac{\pi\beta\rho}{Gk_f\rho'}\right)^{1/3}$

Определения максимальной амплитуды волн несколько разноречивы. Повидимому, опытные данные хорошо передаются формулой ((2), стр. 63).

$$a_{max} = \frac{0{,}3}{g} U_0^2. \tag{14}$$

Следует, однако, отметить, что, наряду с формулой (14), предлагались и другие эмпирические выражения ([9]). Если принять эмпирический закон (14), то, сравнивая (14) с (9), можно определить входящую в формулы (9) и (12) неизвестную постоянную $(k_f/\beta)^{1/3}$, которая оказывается равной ≈ 8. Подставляя это значение $(k_f/\beta)^{1/3}$ в формулу (12), находим, что отношение максимальной амплитуды к длине волны $a_{max}/\lambda_{a_{max}} \simeq 1/10$. Из опытных данных В. В. Шулейкина ([10]) следует, что это отношение $\sim 1/12 — 1/15$ и не зависит от скорости ветра U_0. Другие авторы приводят для этого отношения несколько меньшие значения, от $1/17$ до $1/30$.

Учитывая сложность явлений, происходящих в ветровых волнах, и степень точности экспериментальных измерений, согласие между теорией и экспериментом следует считать весьма удовлетворительным.

Из (7) можно найти интегральную среднюю турбулентную вязкость, сравнивая (7) с (2):

$$\nu_{\text{турб}} \sim \frac{\beta}{6} \sqrt{g} \frac{a^3}{\lambda^{3/2}}.$$

Условия малости затухания (3) можно представить в виде:

$$\beta \frac{a^3}{\lambda^3} \ll 1, \tag{15}$$

что выполнено даже для волн большой амплитуды. Условие (4) после подстановки $v_{\text{турб}} \sim l \left| \partial v / \partial y \right|$ также приобретает вид (15).

Можно еще рассмотреть вопрос о затухании ветрового волнения в отсутствие ветра.

Закон сохранения энергии дает:

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho c^2 k a^2}{2} = -\rho \beta a^5 g^{3/2} \frac{1}{\lambda^{7/2}}. \tag{16}$$

Если считать, что длина затухающей волны не изменяется во времени (что справедливо при малом затухании), то, интегрируя (16), находим для $a_{\max}$:

$$a_{\max}(x) = \frac{a_{\max}}{\left[1 + \frac{3}{2} \beta a_{\max}^3 \frac{x}{\lambda^4}\right]^{1/3}}, \tag{17}$$

где $x = ct$ — путь, пройденный волной.

Для волны с максимальной амплитудой, пользуясь найденным выше значением $a_{\max} / \lambda_{a_{\max}} \sim 1/10$ и формулой (17), получаем

$$a_{\max}(x) = \frac{a_{\max}}{\left(1 + 2{,}4\beta \frac{x}{\lambda_{a_{\max}}}\right)^{1/3}} \sim \frac{a_{\max}}{\left(1 + 1{,}2 \cdot 10^{-3} \frac{x}{\lambda_{a_{\max}}}\right)^{1/3}}. \tag{18}$$

Формулу (18) можно сравнить с экспериментальными данными, которые сформулированы в виде правила ([2], стр. 72): «амплитуда волны уменьшается на $1/3$ начальной высоты при прохождении ею расстояния 6000 λ».

Из формулы (18) следует, что $a_{\max}(x) \sim a_{\max}/3$ при $x \sim 5 \cdot 10^3 \lambda$. Таким образом, формула (18) также достаточно хорошо согласуется с экспериментом.

Институт физической химии
Академии наук СССР

Поступило
2 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Jeffreys, Proc. Roy. Soc., A **107**, 189 (1925). [2] Г. Свердруп, В. Мунк, Сборн. Основы предсказания ветровых волн, зыби и прибоя, ИЛ, 1951. [3] В. В. Шулейкин, ДАН, **93**, № 1 (1954); **94**, № 4, № 6 (1954); **95**, № 5 (1954). [4] П. Л. Капица, ДАН, **64**, 513 (1949). [5] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, 1953, стр. 123. [6] В. Г. Левич, Физико-химическая гидродинамика, Изд. АН СССР, 1951, стр. 523. [7] V. Cornish, Ocean Waves and Kindred Geophysical Phenomena, Cambridge, 1934. [8] G. Shott, Patermans Mitteil., Ergänzungsheft, **109**, 82 (1933). [9] J. Darbyshire, Proc. Roy. Soc., **215**, 299 (1952). [10] В. В. Шулейкин, Физика моря, 1941, стр. 196, 222. [11] Ю. Крылов, Тр. Гос. океанограф. инст., в. 26 (1954).