Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 4

МЕХАНИКА

В. В. ПЕТРОВ и Г. М. УЛАНОВ

К ТЕОРИИ НЕПРЯМОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ПРИ УЧЕТЕ СУХОГО ТРЕНИЯ В ЧУВСТВИТЕЛЬНОМ ЭЛЕМЕНТЕ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 9 XII 1954)

В настоящей заметке рассматривается класс нелинейных динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями (1)

$$\frac{dx_1}{dt} = F(a_0 x_1) + a_1 x_2;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \Phi(b_0 x_1 + b_1 \dot{x}_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3);$$

$$x_3 = c_1 x_1 - c_2 \operatorname{sign} \frac{dx_3}{dt} \quad \text{при} \quad \frac{dx_3}{dt} \gtrless 0; \tag{1}$$

$$| x_3 - c_1 x_1 | < c_2 \quad \text{при} \quad \frac{dx_3}{dt} = 0.$$

Здесь F — нечетная нелинейная функция (рис. 1), допускающая кусочно-линейную аппроксимацию, и Φ — так называемая релейная функция (рис. 1), в общем случае многозначная.

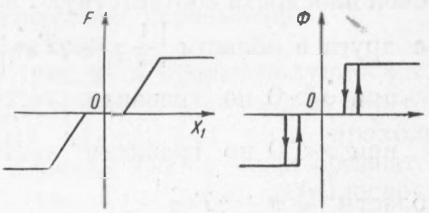


Рис. 1

Система (1) принята в качестве исходной для построения теории непрямого регулирования при учете сухого трения в чувствительном элементе. В безразмерной форме уравнения движения системы регулирования при пренебрежении массой и вязким трением в чувствительном элементе и при условии, что сервомотор регулятора обладает постоянной скоростью закрытия и имеет жесткую обратную связь, могут быть записаны в следующем виде:

$$T_a \dot{\varphi} = -\mu; \quad \delta\eta = \varphi + \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{sign} \dot{\eta} \quad \text{при} \quad \dot{\eta} \gtrless 0; \quad \sigma = \eta - \gamma\mu; \quad T_s \dot{\mu} = f(\sigma);$$

$$| \delta\eta - \varphi | < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad \dot{\eta} = 0, \tag{2}$$

причем $f(\sigma) = +1, 0, -1$, соответственно, при $\sigma > 0$, $\sigma = 0$, $\sigma < 0$.

В уравнениях φ, η, σ и μ — соответственно, относительные отклонения регулируемой координаты, чувствительного элемента, золотника и сервомотора; T_a и T_s — времена разгона и сервомотора; δ — неравномерность регулятора и γ — коэффициент обратной связи.

Рассмотрение подобной задачи проводилось многими авторами; наиболее полное освещение ее дано в работе (1). В указанной работе было произведено исследование разбиения соответствующих фазовых пространств на траектории. В настоящей заметке дается попытка пол-

ного решения задачи на фазовой поверхности, состоящей из наложенных друг на друга листов*. Одновременно приводятся некоторые дополнения работы (1), касающиеся в основном описания движения и фазовых плоскостей. В случае $b_3 = 0$ (или $\varepsilon = 0$) система уравнений (2) исследовалась при помощи многолистной фазовой поверхности (2).

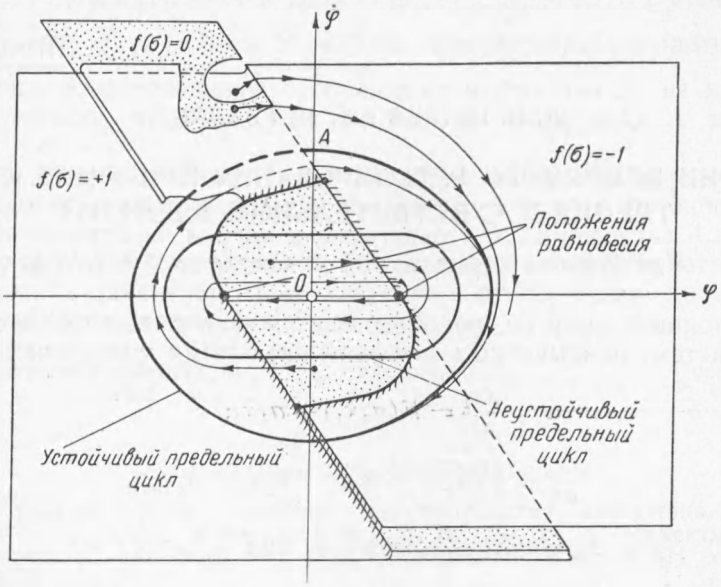


Рис. 2

Переходной процесс системы, описываемый уравнениями (2), может быть отражен на многолистной фазовой плоскости (рис. 2). Листы фазовой плоскости соответствуют значениям функции $f(\sigma)$, наложены друг на друга в области $\left|\frac{1}{\delta}\dot{\varphi} + \gamma T_a \ddot{\varphi}\right| < \frac{\varepsilon}{2\delta}$ и сшиваемы:

при $\dot{\varphi} > 0$ по границам листов $\frac{1}{\delta}\dot{\varphi} + \gamma T_a \ddot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{2\delta}$,

при $\dot{\varphi} < 0$ по границам листов $\frac{1}{\delta}\dot{\varphi} + \gamma T_a \ddot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{2\delta}$, а также внутри области $\left|\frac{1}{\delta}\dot{\varphi} + \gamma T_a \ddot{\varphi}\right| < \frac{\varepsilon}{2\delta}$

при $\dot{\varphi} > 0$ для листов с значениями $f(\sigma) = 1$ и $f(\sigma) = 0$ по границе $y = -\frac{\delta\gamma}{T_s} \pm \sqrt{\frac{\delta^2\gamma^2}{T_s^2} - \frac{2}{T_a T_s}\left(\dot{\varphi} - \frac{\varepsilon}{2}\right)}$ (при $\dot{\varphi} < \frac{\varepsilon}{2}$ знак перед корнем только —),

при $\dot{\varphi} < 0$ для листов с значениями $f(\sigma) = -1$ и $f(\sigma) = 0$ по границе, симметричной вышеуказанной относительно начала координат.

Фазовая плоскость заполнена кусками траекторий $T_a T_s \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = -\dot{\varphi} + \dot{\varphi}_0$ и $-T_a T_s \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \dot{\varphi} + \dot{\varphi}_0$, лежащими на листах с значениями $f(\sigma) = 1$ и $f(\sigma) = -1$, соответственно, и кусками траекторий $\dot{\varphi} = \text{const}$ на полосе, где $f(\sigma) = 0$. Последние соответствуют зоне «зависания» сервомотора, обусловленного действием сил сухого трения в чувствительном элементе. Изображающая точка может начать свое движение с любого из листов фазовой плоскости.

* Основные положения настоящей работы доложены В. В. Петровым 2 XII 1953 г. на II Всесоюзном совещании по теории автоматического регулирования.

Особый случай представляет скользящий режим системы регулирования, при котором изображающая точка движется вдоль линии переключения к состояниям устанавливающегося равновесия. Достаточные условия скользящего режима определяются следующим образом: $T_s \leqslant \delta\gamma T_a/\mu_{max}$. Последнее указывает наличие скользящего режима на конечном участке движения к положению равновесия.

Последовательность кусков траекторий, пробегаемых изображающей точкой при ее движении на фазовой плоскости, составляет траекторию системы.

Структура разбиения фазовой плоскости может быть полностью изучена на основании исследования точечного преобразования полупрямой $\dot{\varphi} > 0$, $\frac{1}{\delta}\varphi + \gamma T_a \dot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{2\delta}$ в полупрямую $\dot{\varphi} < 0$, $\frac{1}{\delta}\varphi + \gamma T_a \dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{2\delta}$ с дополнительным учетом начального движения по траектории $\dot{\varphi} = \text{const}$ в области $\left|\frac{1}{\delta}\varphi + \gamma T_a \dot{\varphi}\right| < \frac{\varepsilon}{2\delta}$.

Диаграмма точечного преобразования в области больших отклонений — таких, при которых переключение сервомотора происходит вне области зависания чувствительного элемента, определяется уравнением

$$T_a T_s \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = -\varphi + \varphi_0,$$

дающим связь $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(\varphi_0)$, где $\dot{\varphi}$ — точки полупрямых переключений $\frac{1}{\delta}\varphi + \gamma T_a \dot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{2\delta}$ и $\frac{1}{\delta}\varphi + \gamma T_a \dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{2\delta}$.

В области отклонений, при которых переключение сервомотора происходит при «зависании» координаты чувствительного элемента, диаграмма точечных преобразований включает аналогичное преобразование точек $\dot{\varphi}(\varphi_0)$ линии переключения на параболу и с нее по линии $\dot{\varphi} = \text{const}$ на полупрямую переключения. Последний участок движения изображающей точки характеризует «зависание» сервомотора.

Из изложенного непосредственно следует:

1. В случае расположения точки A (рис. 2) в правой полуплоскости фазовой плоскости φ, $\dot{\varphi}$ в системе существует устойчивый и неустойчивый предельные циклы. Устойчивый предельный цикл проходит через точку пересечения полупрямой переключения с осью ординат.

2. В случае расположения точки A (рис. 2) в левой полуплоскости фазовой плоскости φ, $\dot{\varphi}$ в системе не существует предельного цикла, и процесс регулирования сходится при любых начальных отклонениях системы.

3. В случае расположения точек A на оси ординат фазовой плоскости устойчивый и неустойчивый предельные циклы сливаются в один полуустойчивый предельный цикл.

4. Параметры, соответствующие последнему случаю, отвечают бифуркационным значениям, ибо при сколь угодно малом изменении параметров полуустойчивый предельный цикл либо исчезает, либо опять распадается на два.

Бифуркационное значение параметров, определяющих границу области устойчивости «в большом» в пространстве параметров, находится из условий пересечения параболы

$$y = -\frac{\delta\gamma}{T_s} - \sqrt{\frac{\delta^2\gamma^2}{T_s^2} - \frac{2}{T_a T_s}\left(\varphi - \frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

с осью ординат и прямой переключения $\frac{1}{\delta}\varphi + \gamma T_a \dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{2\delta}$ в одной точке. Получаемое бифуркационное значение параметров $\varepsilon = 8\delta^2\gamma^2 T_a/T_s$ совпадает с результатами работы [1].

Система автоматического регулирования имеет два состояния равновесия, расположенных по краям отрезка покоя $\dot{\varphi} = 0$ и $|\varphi_0| = \varepsilon/2$ (рис. 2). Процесс регулирования в случае $\varepsilon > 8\delta^2\gamma^2 T_a/T_s$ является устойчивым «в большом» и всегда сходится к одному из указанных положений при любом изменении нагрузки.

Поступило
6 XII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Андронов, Н. Н. Баутин, Г. С. Горелик, Автоматика и телемеханика, **7**, № 1, 15 (1946). [2] В. В. Петров, Г. М. Уланов, Автоматика и телемеханика, **11**, № 5 (1950).