Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 3

МАТЕМАТИКА

А. П. ШИРОКОВ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ КОВАРИАНТНО ПОСТОЯННЫХ АФФИНОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 I 1955)

Пусть аффинор f_α^β ковариантно постоянен в аффинной связности без кручения $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$. Обозначим через λ его характеристическое число. Тогда нетрудно доказать следующие предложения:

А. *Характеристические числа ковариантно постоянного аффинора постоянны.*

Б. *Площадки, построенные на векторах, удовлетворяющих уравнению* $(f-\lambda E)^h v = 0$, *образуют голономное поле абсолютно параллельных площадок.*

В. *Существует голономная система координат, в которой матрица аффинора* f *принимает вид*

$$f = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & * & \\ & & \ddots \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

причем в этой системе координат равны нулю компоненты связности, индексы которых соответствуют строкам матрицы f, *отвечающим различным блокам, а элементы блока не зависят от переменных, номера которых соответствуют другим блокам; при этом каждый из блоков имеет одно единственное постоянное собственное значение.*

Целью дальнейшего является показать, что можно построить такую голономную систему координат, в которой координаты ковариантно постоянного аффинора постоянны (в частности, в которой матрица аффинора во всем пространстве приводится к каноническому виду Жордана). Ограничимся лишь случаем вещественных собственных чисел.

Рассмотрим для иллюстрации метода несколько частных случаев ковариантно постоянных аффиноров, причем, в силу В, ограничимся аффинорами с единственным собственным значением.

1. Нильпотентный аффинор, в характеристику которого входят лишь двойки. В $2n$-мерном пространстве имеется голономное поле n-мерных площадок, все векторы которых под воздействием аффинора обращаются в нуль. Берем первые n координатных векторов голономной системы в этих площадках; тогда матрица аффинора примет вид

$$f = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline * & * \end{array}\right).$$

Эта форма матрицы сохраняется при преобразованиях

$$x^{i'} = x^{i'}(x^k;\ x^{n+k}),$$
$$x^{n+i'} = x^{n+i'}(x^{n+k}). \tag{1}$$

Считая, что α, β, γ пробегают значения от 1 до $2n$, мы из условий $\nabla_\alpha f^\gamma_\beta = 0$ получим

$$\Gamma^{n+k}_{\alpha i} = 0,$$
$$\partial_i f^k_{n+r} + \Gamma^k_{is} f^s_{n+r} = 0, \tag{2}$$
$$\partial_{n+i} f^k_{n+j} - \Gamma^{n+s}_{n+i,\ n+j} f^k_{n+s} + \Gamma^k_{n+i,\ s} f^s_{n+j} = 0.$$

Для того чтобы обратить матрицу $(*)$ в единичную, надо подобрать такое (1), чтобы

$$A^{n+s}_{n+i'} A^{k'}_t f^t_{n+s} = \delta^k_i.$$

Оставляя x^{n+i} неизменными, получим отсюда

$$A^{k'}_t f^t_{n+s} = \delta^k_s.$$

Условия интегрируемости $\partial_{[s} A^{k'}_{t]} = 0$ выполняются тождественно в силу (2).

Итак, *матрицу ковариантно постоянного нильпотентного аффинора, в характеристику которого входят лишь двойки, в некоторой голономной системе координат можно привести к виду*

$$f = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \begin{matrix} 1 & 0 \\ \ddots & \\ 0 & \ddots\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right).$$

2. Общий случай аффинора с нулевым собственным значением. Так как площадки, построенные на векторах, удовлетворяющих уравнению $(f - \lambda E)^k v = 0$, образуют голономное поле, то выберем первые n_1 координатных векторов в площадке собственных векторов, вторые n_2 координатных векторов — в площадке векторов, удовлетворяющих уравнению $f^2 v = 0$, и т. д. В построенной голономной системе координат матрица аффинора примет вид

$$\begin{array}{l} \\ (\alpha_1\beta_1 \ldots \gamma_1) \\ (\alpha_2\beta_2 \ldots \gamma_2) \\ \\ (\alpha_p\beta_p \ldots \gamma_p) \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c|c} \overbrace{}^{n_1} & \overbrace{}^{n_2} & & \overbrace{}^{n_p} \\ 0 & 0 & & 0 \\ \hline * & 0 & & 0 \\ \hline * & * & & \\ \hline * & * & * & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_p \\ \\ n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n \end{array}$$

Эта матрица сохраняет свой вид при преобразованиях

$$x^{\alpha_1'} = x^{\alpha_1'}(x^{\gamma_1'},\ x^{\gamma_2'}, \ldots, x^{\gamma_p'}),$$
$$x^{\alpha_2'} = x^{\alpha_2'}(x^{\gamma_2'}, \ldots, x^{\gamma_p'}), \tag{3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x^{\alpha_p'} = x^{\alpha_p'}(x^{\gamma_p'}).$$

Условия ковариантного постоянства дают

$$\Gamma^{\beta_k}_{\alpha\alpha_i} = 0 \quad (k > i,\ \alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Для приведения к каноническому виду компонент $f^{\alpha_{p-1}}_{\alpha_p}$ положим

$$A^{\sigma_p}_{\alpha_p} A^{\alpha_{p-1}}_{\sigma_{p-1}} f^{\sigma_{p-1}}_{\sigma_p} = \delta^{\alpha_{p-1}}_{\alpha_p - n_{p-1}}.$$

Оставляя x^{γ_p} без изменения, получим отсюда систему

$$A^{\alpha_{p-1}}_{\sigma_{p-1}} f^{\sigma_{p-1}}_{\alpha_p} = \delta^{\alpha_{p-1}}_{\alpha_p - n_{p-1}}. \tag{5}$$

Эта система не противоречит (3), ибо при $\alpha < \alpha_{p-1}$ в силу (4)

$$\partial_\alpha f^{\alpha_{p-1}}_{\alpha_p} = 0.$$

Рассмотрим систему

$$f^{\sigma_{p-1}}_{\alpha_p} \frac{\partial u}{\partial x^{\sigma_{p-1}}} = 0. \tag{6}$$

Она замкнута, ибо, обозначая

$$X_{\alpha_p} \equiv f^{\sigma_{p-1}}_{\alpha_p} \frac{\partial u}{\partial x^{\sigma_{p-1}}}, \quad X_{\beta_p} \equiv f^{\sigma_{p-1}}_{\alpha_p} \frac{\partial u}{\partial x^{\sigma_{p-1}}},$$

в силу (4) получим

$$(X_{\alpha_p}, X_{\beta_p}) = 0.$$

Итак, система (6) дает $(n_{p-1} - n_p)$ функционально независимых решений; беря еще n_p независимых решений остальных систем (5), получим все $x^{\alpha_{p-1}}$ *.

Пусть координаты $x^{\alpha_{k+1}}, \ldots, x^{\alpha_p}$ уже выбраны; покажем, что можно выбрать x^{α_k} так, чтобы привести k-ю полосу вертикали к каноническому виду. Мы должны потребовать

$$f^{\alpha_k}_{\alpha_{k+1}} = A^{\tau_{k+1}}_{\alpha_{k+1}} A^{\alpha_k}_{\sigma_k} f^{\sigma_k}_{\tau_{k+1}} = \delta^{\alpha_k}_{\alpha_{k+1} - n_k},$$

$$f^{\alpha_k}_{\alpha_{k+s}} = A^{\tau_{k+1}, \ldots, k+s}_{\alpha_{k+s}} A^{\alpha_k}_{\sigma_k, \ldots, p} f^{\sigma_k, \ldots, p}_{\tau_{k+1}, \ldots, k+s} = 0 \quad (s > 1).$$

Если координаты $x^{\alpha_{k+1}}, \ldots, x^{\alpha_p}$ уже зафиксированы, то мы получаем отсюда

$$A^{\alpha_k}_{\sigma_k} f^{\sigma_k}_{\alpha_{k+1}} = \delta^{\alpha_k}_{\alpha_{k+1} - n_k}, \qquad A^{\alpha_k}_{\sigma_{i \geqslant k}} f^{\sigma_{i \geqslant k}}_{\alpha_{k+s}} = 0.$$

Эта система не противоречит (3), так как при $\alpha \leqslant \nu_{k-1}$ в силу (4) получаем

$$\partial_\alpha f^{\sigma_{i \geqslant k}}_{\alpha_{k+s}} = 0.$$

Обозначим теперь

$$X_r \equiv f^{\sigma_{i \geqslant k}}_{\alpha_{k+r}} \frac{\partial u}{\partial x^{\sigma_{i \geqslant k}}}, \quad X_s \equiv f^{\sigma_{i \geqslant k}}_{\alpha_{k+s}} \frac{\partial u}{\partial x^{\sigma_{i \geqslant k}}}.$$

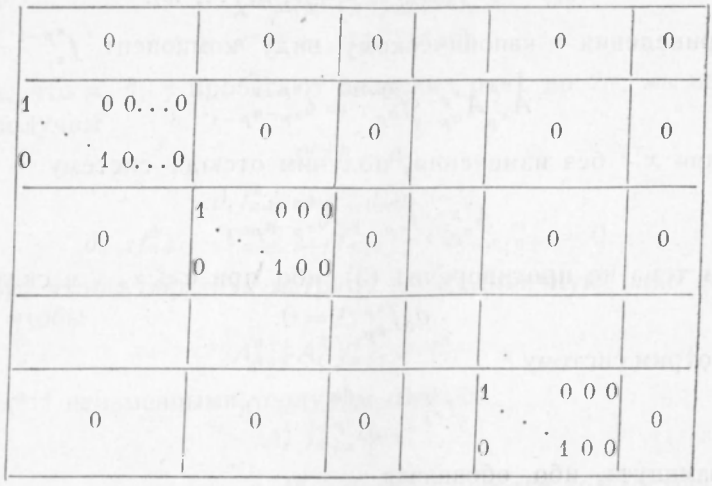
Тогда в силу (4) будем иметь

$$(X_r X_s) = 0.$$

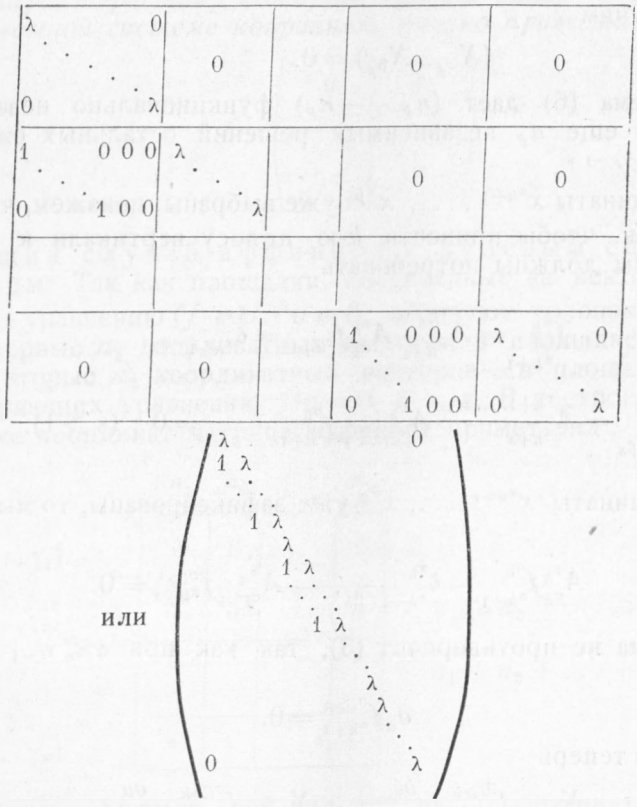
---

* При $n_{p-1} = n_p$ рассуждения проводим как в случае (1).

Итак, в некоторой голономной системе координат матрица нашего аффинора может быть приведена к виду



Вообще, матрицу всякого ковариантно постоянного аффинора с единственным собственным значением можно во всем пространстве привести к виду



или

Учитывая предыдущие результаты, можно сделать вывод, что *матрица всякого ковариантно постоянного аффинора может быть в некоторой голономной системе координат приведена к каноническому виду Жордана.*

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
28 VI 1954