Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 4

МАТЕМАТИКА

Г. Е. ХУХУНАИШВИЛИ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ УНИВЕРСАЛЬНОГО МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА УРЫСОНА

(Представлено академиком П. С. Александровым 21 XII 1954)

В 1924 г. П. С. Урысон (1) построил метрическое сепарабельное пространство U, которое для любого метрического сепарабельного пространства R содержит подмножество, ему изометричное. Позже Банахом и Мазуром было доказано (2), что пространство C также является универсальным в смысле, указанном выше. Но пространство Урысона однородно, т. е. для любых двух конгруентных конечных подмножеств A и B пространства U существует изометрическое отображение пространства U самого на себя, переводящее A в B. Пространство C не является таковым. П. С. Урысон дает также пример двух конгруентных несчетных подмножеств M и N пространства U, для которых не существует изометрического отображения пространства U самого на себя, переводящего M в N. Далее, он ставит задачу: «Нельзя ли любые два конгруентных счетных множества в U перевести друг в друга изометрическим отображением пространства U на себя?». Мы даем здесь достаточное условие для того, чтобы два конгруентных множества можно было перевести одно в другое изометрическим отображением пространства U самого на себя.

Нам будут нужны некоторые свойства пространства U. Основное свойство выражается следующей теоремой Урысона.

Теорема. *Пусть дано конечное число точек пространства* U: $x_1, x_2, \ldots, x_s$. *Пусть, кроме того, дано* s *положительных чисел* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, *удовлетворяющих неравенствам*

$$|\alpha_i - \alpha_k| \leqslant \rho(x_i, x_k) \leqslant \alpha_i + \alpha_k$$

и не подчиненных никаким другим условиям. Тогда существует такая точка y *пространства* U, *что* $\rho(y, x_i) = \alpha_i$ $(i \leqslant s)$.

Урысон показывает также, что в пространстве U сфера $S(a, r)$ с центром в точке a радиуса r есть пространство, универсальное для всех метрических сепарабельных пространств, которые имеют диаметры не больше чем $2r$.

Приступая к исследованию поставленного Урысоном вопроса, заметим, что отрицательный ответ на этот вопрос следует из указанного примера Урысона. Действительно, если за A принять счетное плотное в M подмножество и за B — конгруентное множеству A подмножество множества N, то легко видеть, что не существует изометрического отображения пространства U самого на себя, переводящего A в B*. После этого естественно поставить вопрос: каково будет решение задачи, поставленной Урысоном, если A и B — счетные замкнутые множества.

* Отрицательное решение этой же задачи дано в работе (3).

Отрицательное решение этой задачи дает следующий пример. Пусть $S(a, 1)$ — единичная сфера пространства U с центром в произвольной точке a. Очевидно, что $S(a, 1)$ — некомпактное множество. Следовательно, существует такое $\varepsilon > 0$, что множество $S(a, 1)$ не обладает конечной ε-сетью. Предположим, что $\varepsilon < 1$, и рассмотрим счетное плотное на $S(a, 1)$ множество

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{1}$$

Вокруг каждой точки x_n рассмотрим шар радиуса ε. Обозначим через y_1 точку x_1, и из последовательности (1) вычеркнем все точки, отличные от y_1, которые попали внутрь шара с центром в точке y_1. Пусть построены точки $y_1, y_2, \ldots, y_k$, удовлетворяющие условиям $\rho(y_i, y_j) \geqslant \varepsilon$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Вычеркнем из последовательности (1) все точки, которые попали хоть в один шар с центром в точке y_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, и обозначим через y_{k+1} первую точку, отличную от точек $y_1, y_2, \ldots, y_k$, не вычеркнутую из последовательности (1). Этот процесс будет продолжаться бесконечно, так как в $S(a, 1)$ не существует конечной ε-сети. Очевидно, что множество

$$y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots$$

замкнуто и образует счетную ε-сеть множества $S(a, 1)$. Обозначим через A множество точек $a, y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots$ В $S(a, 1)$ существует множество B, конгруентное множеству A. Легко показать, что не существует изометрического отображения пространства U самого на себя, переводящего A в B. Предположим, что такое отображение $y = \varphi(x)$ пространства U существует. Пусть $a' = \varphi(a)$, $a' \in B$ и $a = \varphi(a'')$, $a'' \in S(a, 1)$. Так как $A \setminus a$ есть ε-сеть на $S(a, 1)$, то $\rho(a'', A \setminus a) \leqslant \varepsilon$, но $B \setminus a' = \varphi(A \setminus a)$ и $\rho(a, B \setminus a') = 1 > \varepsilon$. Следовательно, не существует изометрического отображения пространства U самого на себя, переводящего A в B.

Далее мы решаем задачу для случая компактных множеств. Мы докажем теорему, из которой следует положительное решение этой задачи.

Предварительно докажем лемму.

Лемма. *Если A и B — два конгруентных вполне ограниченных подмножества пространства U, то для произвольной точки $x_0 \in U$ можно найти соответствующую точку $y_0 \in U$ такую, что $\rho(x_0, a) = \rho(y_0, b)$, где a — произвольная точка множества A и b — соответствующая ей точка множества B.*

Доказательство. Если $x_0 \in [A]$, то лемма очевидна. Если $x_0 \overline{\in} [A]$, то $\alpha = \rho(x_0, A) > 0$. Зададим убывающую последовательность $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_n > \ldots$ положительных чисел такую, что $\varepsilon_1 < {}^1/_3\,\alpha$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ сходится. Пусть

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}, a_{n_1+1}, \ldots, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}, \ldots \tag{2}$$

счетная последовательность точек множества A такая, что точки $a_1, a_2, \ldots, a_k$ образуют ε_k-сеть множества A. Кроме того, пусть $b_1, b_2, \ldots, b_{n_1}, b_{n_1+1}, \ldots, b_{n_2}, \ldots, b_{n_k}, b_{n_k+1}, \ldots, b_{n_{k+1}}, \ldots$ суть соответствующие точкам (2) точки множества B.

Положим $\mu_i = \rho(x_0, a_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим конечные числа точек $b_1, b_2, \ldots, b_{n_1}$ и конечное число чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n_1}$. Очевидны неравенства;

$$|\mu_l - \mu_k| \leqslant \rho(b_i, b_k) \leqslant \mu_i + \mu_k, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n_1.$$

По основной теореме Урысона существует точка $y_1 \in U$ такая, что $\rho(y_1, b_i) = \mu_i$, $i = 1, 2, \ldots, n_1$.

Предположим, что построены точки $y_1, y_2, \ldots, y_m$ такие, что $\rho(y_k, b_i) = \mu_i$, $i = 1, 2, \ldots, n_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ и $\rho(y_k, y_{k+1}) = 2\varepsilon_k$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$. Для построения точки y_{m+1} рассмотрим точки $b_1, \ldots, b_{n_1}, b_{n_1+1}, \ldots, b_{n_m}, \ldots, b_{n_{m+1}}, y_m$ и положительные числа $\mu_1, \ldots, \mu_{n_1}, \mu_{n_1+1}, \ldots, \mu_{n_m}, \ldots, \mu_{n_{m+1}}, 2\varepsilon_m$. Неравенства

$$|\mu_i - \mu_k| \leqslant \rho(b_i, b_k) \leqslant \mu_i + \mu_k, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n_{m+1}$$

очевидны. Докажем неравенства

$$|\mu_i - 2\varepsilon_m| \leqslant \rho(b_i, y_m) \leqslant \mu_i + 2\varepsilon_m, \quad i = 1, 2, \ldots, n_{m+1}. \tag{3}$$

Для $i = 1, \ldots, n_m$ неравенства (3) очевидны. Чтобы доказать остальные неравенства, заметим, что $\mu_i > 3\varepsilon_m$ для любого i и m. Поэтому достаточно показать справедливость неравенств

$$\mu_{n_m+i} - 2\varepsilon_m \leqslant \rho(b_{n_m+i}, y_m) \leqslant \mu_{n_m+i} + 2\varepsilon_m, \quad i = 1, 2, \ldots, (n_{m+1} - n_m). \tag{4}$$

Так как $b_1, b_2, \ldots, b_{n_m}$ есть ε_m-сеть множества B, то существует такое b_ν, $\nu \leqslant n_m$, что для данного i имеем $\rho(b_\nu, b_{n_m-i}) \leqslant \varepsilon_m$. Поэтому

$$\rho(b_{n_m+i}, y_m) \geqslant \rho(y_m, b_\nu) - \rho(b_\nu, b_{n_m+i}) \geqslant \rho(x_0, a_\nu) - \varepsilon_m \geqslant \mu_{n_m+i} - 2\varepsilon_m.$$

Таким же образом доказывается и правая часть неравенств (4).

В силу основной теоремы Урысона, существует точка $y_{m+1} \in U$ такая, что $\rho(y_{m+1}, b_i) = \mu_i$, $i = 1, 2, \ldots, n_{m+1}$, и $\rho(y_{m+1}, y_m) = 2\varepsilon_m$.

Таким образом мы получим последовательность точек

$$y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots \tag{5}$$

такую, что $\rho(y_n, b_i) = \rho(x_0, a_i)$, $n = 1, 2, \ldots$; $i = 1, 2, \ldots, n_m$. Кроме того, $\rho(y_m, y_{m+p}) \leqslant 2 \sum_{i=0}^{p-1} \varepsilon_{m+i}$, и так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ сходится, то последовательность (5) есть фундаментальная последовательность. Поэтому существует точка $y_0 = \lim_{m\to\infty} y_m$. Легко видеть, что $\rho(x_0, a) = \rho(y_0, b)$, где b — произвольная точка множества B и a — соответствующая ей точка множества A.

Теорема. *Если A и B — вполне ограниченные конгруентные подмножества пространства U, то существует изометрическое отображение пространства U самого на себя, переводящее A в B.*

Доказательство. Пусть

$$d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots \tag{6}$$

счетное плотное в U множество. Обозначим через a_1 первую точку в последовательности (6), которая не принадлежит множеству A. По лемме точке a_1 соответствует точка b_1 такая, что $\rho(a_1, a) = \rho(b_1, b)$, где a и b — соответствующие точки множеств A и B. Предположим, что уже построены конгруентные множества $A_h = \{a_1, a_2, \ldots, a_h\} \cup A$ и $B_h = \{b_1, b_2, \ldots, b_h\} \cup B$, и пусть h — четное число. Обозначим через

a_{h+1} первую не принадлежащую множеству A_h точку b последовательности (6). По лемме точке a_{h+1} соответствует точка b_{h+1}. Если h нечетно, то обозначим через b_{h+1} первую, не принадлежащую множеству B_h, точку последовательности (6). По лемме точке b_{h+1} соответствует точка a_{h+1}. Очевидно, что в обоих случаях множества $A_{h+1} = \{a_1, a_2, \ldots, a_h, a_{h+1}\} \cup A$ и $B_{h+1} = \{b_1, \ldots, b_h, b_{h+1}\} \cup B$ конгруентны. Очевидно, что $A' = \bigcup_{h=1}^{\infty} A_h$ и $B' = \bigcup_{h=1}^{\infty} B_h$ конгруентны и плотны в U. Построенное изометрическое отображение множества A' на множество B' автоматически продолжается на все U, и при этом A переходит в B.

Остается открытым вопрос, не является ли вполне ограниченность и необходимой в некотором смысле. Точнее, не верно ли такое утверждение: для любого не вполне ограниченного подмножества A пространства U существует конгруентное ему подмножество B пространства U такое, что не существует изометрического отображения пространства U самого на себя, переводящего A в B.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
22 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Урысон, Тр. по топологии и другим областям математики, 2, М.—Л., 1951, стр. 747—777. [2] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, М.—Л., 1951. [3] С. Мрувка, Бюлл. Польской АН, отд. III, 1, в. 6, 229 (1953).