Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 4

МАТЕМАТИКА

В. И. КОРОВИН

ЗАМКНУТЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЛАПЛАСА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 23 XII 1955)

Рассмотрим трижды сопряженную систему поверхностей в трехмерном проективном пространстве, описываемую точкой (A_0) тетраэдра с вершинами A_i $(i = 0, 1, 2, 3)$.

Инфинитезимальные перемещения тетраэдра определяются уравнениями $dA_i = \omega_i^k A_k$, где ω_i^k — формы Пфаффа от дифференциалов 3 главных параметров u, v, w.

Пусть

$$\omega_0^2 = \omega_0^3 = 0, \tag{1}$$

$$\omega_0^1 = \omega_0^3 = 0, \tag{2}$$

$$\omega_0^1 = \omega_0^2 = 0 \tag{3}$$

линии пересечения поверхностей.

Обозначим (A_{ij}) $(i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$ преобразование Лапласа точки (A_0) в направлении линии i и при перемещении вдоль линии j.

Известно ([1]), что точка (A_{ij}) также описывает трижды сопряженную систему поверхностей. Ее преобразования Лапласа можно обозначить A_{ijkl} $(k, l = 1, 2, 3;\ k \neq l)$ и т. д.

Последовательность $\ldots A_{2121}, A_{21}, A_0, A_{12}, A_{1212}, \ldots$ называется 1-й главной последовательностью Лапласа, проходящей через точку A_0. Аналогично $\ldots A_{3131}, A_{31}, A_0, A_{13}, A_{1313}, \ldots$ — 2-я и $\ldots A_{3232}, A_{32}, A_0, A_{23}, A_{2323}, \ldots$ — 3-я главные последовательности Лапласа. Последовательность $A_{13}, A_{1212}, A_{121213}, \ldots$ будет 1-й последовательностью Лапласа, вписанной в 1-ю главную последовательность. Она называется 1-й производной последовательностью, и т. д.

Пусть 1-я главная последовательность будет замкнутой последовательностью, которая будет теперь состоять из 4 отрезков прямых с вершинами в точках A_{21}, A_0, A_{12}, A_{1212} $(A_{2121} \equiv A_{1212})$. Тогда вписанная в нее производная последовательность также будет замкнутой, и т. д. Мы получим бесконечную цепь вписанных друг в друга замкнутых последовательностей Лапласа.

Потребуем теперь, чтобы 2-я и 3-я главные последовательности Лапласа были замкнутыми. Тогда и все вписанные в них 2-е и 3-и последовательности будут замкнутыми. В этом случае оказывается, что все последовательности замкнутся в конечную систему вписанных друг в друга последовательностей Лапласа.

Теорема. *В трехмерном проективном пространстве существует* 16 *точек, каждая из которых описывает трижды сопряженную систему поверхностей, и каждая из этих точек может быть получена не больше чем* 2 *преобразованиями Лапласа любой другой точки в определенных направлениях.*

Для доказательства этой теоремы оказывается достаточно потребовать, чтобы первые 3 главные последовательности Лапласа были замкнутыми.

Полученная система дифференциальных уравнений имеет решение, которое зависит от 9 произвольных функций одного аргумента. Эту систему точек можно рассматривать или как 1-ю, или как 2-ю, или как 3-ю главную замкнутую последовательность Лапласа и 3 ее производных (4-я производная совпадает с исходной последовательностью).

Поступило
18 IX 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Т. Л. Козьмина, ДАН, 55, № 3 (1947). [2] С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, 1948.