Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 4

МАТЕМАТИКА

В. М. ИВАНОВА

К ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВ ПОДМНОЖЕСТВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 10 XII 1954)

В моей диссертации (1) были исследованы некоторые свойства пространств непустых подмножеств произвольного топологического пространства.

Вообще говоря, представляют интерес довольно различные топологизации пространства подмножеств. В работе (1) топологизация определялась следующим образом.

Пусть E — топологическое пространство, и $\mathcal{E}(E)$ — множество непустых замкнутых подмножеств E. Пусть, далее, G — любое подмножество E; через $\mathfrak{U}_1(G)$ обозначим совокупность непустых замкнутых подмножеств E, содержащихся в G, через $\mathfrak{U}_2(G)$ — совокупность замкнутых подмножеств E, пересекающихся с G. За открытый базис пространства $\mathcal{E}(E)$ принимается система его подмножеств вида $\mathfrak{U}_1(G)$, $\mathfrak{U}_2(G)$ и конечных пересечений подобных множеств, где G — произвольные открытые подмножества E.

Часть изложенных в работе (1) результатов была в дальнейшем опубликована другими авторами (2). Настоящая заметка посвящена изложению одного из результатов, относящегося к проблеме нормальности пространства подмножеств.

Проблема состоит в выяснении условий, обеспечивающих нормальность $\mathcal{E}(E)$. Если E — бикомпакт, то $\mathcal{E}(E)$ также бикомпакт, а следовательно, нормальное пространство. Однако из нормальности E не следует нормальность $\mathcal{E}(E)$: существуют нормальные пространства, пространства подмножеств которых ненормальны, а именно, имеет место следующая теорема:

Теорема. *Пусть J_τ — естественным образом топологизированное множество порядковых чисел, меньших τ, где τ — предельное порядковое число.*

Тогда $\mathcal{E}(J_\tau)$ ненормально.

При доказательстве этой теоремы приходится рассматривать два случая: 1) существует счетная последовательность порядковых чисел $<\tau$, сходящая к τ; 2) не существует такой последовательности.

1) В первом случае подобная последовательность является замкнутым множеством в J_τ, и индуцированная на нем топология — дискретная. Тогда доказательство ненормальности пространства $\mathcal{E}(J_\tau)$ сводится, как легко видеть, к доказательству ненормальности пространства подмножеств счетного дискретного пространства. Доказательство проводится посредством построения двух замкнутых подмножеств, неотделимых открытыми множествами. Приведем идею доказательства.

Для облегчения конструкции будем рассматривать счетное дискретное пространство E как множество конечномерных векторов, составляющие которых являются натуральными числами, и введем на E

частичное упорядочение по следующему правилу: $(a_1, a_2, \dots, a_p) < (b_1, b_2, \dots, b_q)$ тогда и только тогда, если $p \leqslant q$, $a_i = b_i$ $(i = 1, \dots, p-1)$, $a_p \leqslant b_p$, причем если $p = q$, то $a_p < b_p$.

Множество, состоящее из векторов, меньших или равных данному вектору, назовем отрезком. Все отрезки являются конечными множествами. Объединение бесконечной строго возрастающей (по включению) последовательности отрезков будем называть ломаной. Размерностью ломаной (или отрезка) будем называть максимальную размерность входящих в нее векторов, если таковая есть, в противном случае ломаную будем называть бесконечномерной.

Пусть $\mathscr{F}_1$ — множество конечномерных ломаных, $\mathscr{F}_2$ — множество бесконечномерных ломаных. Очевидно, $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ не пересекаются. Без особого труда доказывается, что $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ являются замкнутыми подмножествами $\mathfrak{S}(E)$ (доказывается, что, вообще, любое множество ломаных является замкнутым в $\mathfrak{S}(E)$ подмножеством).

Для завершения доказательства достаточно показать, что замыкание любого открытого в $\mathfrak{S}(E)$ множества, содержащего $\mathscr{F}_1$, имеет непустое пересечение с $\mathscr{F}_2$.

Итак, пусть $\mathfrak{U}$ открыто в $\mathfrak{S}(E)$ и $\mathscr{F}_1 \subset \mathfrak{U}$. Можно показать, что произвольной ломаной $A \in \mathscr{F}_1$ можно сопоставить отрезок $B(A)$ и открытое в $\mathfrak{S}(E)$ множество $\mathfrak{U}(A)$, обладающие следующими свойствами:

$$B(A) \subset A,$$

$$A \in \mathfrak{U}(A) = \mathfrak{U}_1(A) \cap \bigcap_{x \in B(A)} \mathfrak{U}_2((x)) \subset \mathfrak{U}.$$

Построим теперь счетную строго возрастающую последовательность отрезков $B^i \in \mathfrak{U}$, сходящуюся к некоторому $F \in \mathscr{F}_2$, по следующему индуктивному правилу: берем произвольно $A^1 \in \mathscr{F}_1$ и полагаем $B^1 = B(A^1)$, $\dim B^1 \geqslant 1$. Допустим, что построен отрезок B^k и пусть $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ — максимальный вектор, входящий в B^k. Рассмотрим ломаную A^{k+1}, состоящую из векторов $(a_1, a_2, \dots, a_p, i)$, $(i = 1, 2, \dots)$. Очевидно, $B^k \subset A^{k+1}$, $B(A^{k+1}) \subset A^{k+1}$ и существует отрезок B^{k+1} такой, что $B^k \cup B(A^{k+1}) \subset B^{k+1} \subset A^{k+1}$, и такой, что размерность B^{k+1} строго больше размерности B^k. Кроме того $B^{k+1} \subset \mathfrak{U}(A^{k+1}) \subset \mathfrak{U}$.

Таким образом может быть построена строго возрастающая система отрезков B^k $(k = 1, 2, \dots)$ возрастающей размерности. Тогда ломаная $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, очевидно, принадлежит к $\mathscr{F}_2$. С другой стороны, последовательность отрезков $B^1, B^2, \dots, B^k, \dots$, каждый из которых $\in \mathfrak{U}$, сходится к $F \in \mathscr{F}_2$; следовательно, действительно, пересечение замыкания $\mathfrak{U}$ с $\mathscr{F}_2$ не пусто.

2) Переходим ко второму случаю. В этом случае доказательство в принципе отличается от предыдущего.

Обозначим $J_\tau^\varkappa$ — множество порядковых чисел, бо́льших или равных $\varkappa$ и меньших τ. Очевидно,

$$J_\tau^\varkappa \in \mathfrak{S}(J_\tau).$$

Пусть $\mathscr{F}_1$ — подмножество $\mathfrak{S}(J_\tau)$, состоящее из всех $J_\tau^\varkappa$ при $\varkappa \in J_\tau$; $\mathscr{F}_2$ — подмножество $\mathfrak{S}(J_\tau)$, состоящее из всех одноточечных подмножеств J_τ; $\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 = \Lambda$. $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$, как нетрудно видеть, замкнуты в $\mathfrak{S}(J_\tau)$.

Чтобы доказать ненормальность пространства $\mathfrak{S}(J_\tau)$, достаточно показать, что замыкание любой окрестности $\mathfrak{U}$ множества $\mathscr{F}_1$ в $\mathfrak{S}(J_\tau)$ имеет с $\mathscr{F}_2$ непустое пересечение.

Пусть $\mathfrak{U}$ — произвольная окрестность $\mathscr{F}_1$ в $\mathfrak{S}(J_\tau)$ и $J_\tau^{\lambda_1}$ — произвольный элемент $\mathscr{F}_1$. Тогда существует элементарная окрестность $\mathfrak{U}_1(G_0) \cap \mathfrak{U}_2(G_1) \cap \dots \cap \mathfrak{U}_2(G_k)$ элемента $J_\tau^{\lambda_1}$, содержащаяся в $\mathfrak{U}$.

Пусть $\lambda_i^{(1)} \in J_\tau^{\lambda_1} \cap G_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$; тогда $\Lambda_1 = \{\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots, \lambda_k^{(1)}\} \in \mathfrak{U}$. Так как τ — предельное, то существует $\lambda_2 \in J_\tau$, большее всех $\lambda_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Индуктивным процессом можно построить возрастающую последовательность $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ порядковых чисел $\in J_\tau$ и последовательность $\{\Lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ элементов $\mathfrak{U}$ таких, что $\Lambda_i \subset [\lambda_i, \lambda_{i+1}]$.

Так как в этом случае J_τ — компакт, то существует $\lambda \in J_\tau$ такое, что последовательность $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к λ в J_τ. Можно доказать, что тогда в $\mathfrak{S}(J_\tau)$ последовательность $\{\Lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к одноточечному множеству $(\lambda) \in \mathfrak{S}(J_\tau)$. Так как $\Lambda_i \in \mathfrak{U}$, то, следовательно, (λ) принадлежит замыканию $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}_2$. Этим завершается рассмотрение второго случая.

Поступило
10 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. М. Иванова, Общая теория пространств замкнутых множеств, Кандидатск. диссертация, Математ. инст. АН СССР, 28 XII 1950. [2] E. Michael, Trans. Am. Math. Soc., **71**, 152 (1951).