Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 3

МАТЕМАТИКА

С. Н. ЧЕРНИКОВ

О ДОПОЛНЯЕМОСТИ СИЛОВСКИХ П-ПОДГРУПП В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУПП

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 I 1955)

Целью настоящей статьи является перенесение на некоторые классы бесконечных групп факторизационной теоремы Шура (см. [1]):

Если порядок нормального делителя $\mathfrak{A}$ *конечной группы* $\mathfrak{G}$ *взаимно прост с его индексом в группе* $\mathfrak{G}$, *то он дополняем в* $\mathfrak{G}$, *т. е. в группе* $\mathfrak{G}$ *существует такая подгруппа* $\mathfrak{B}$ (*дополнительная к подгруппе* $\mathfrak{A}$), *что* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ *и* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = 1$.

Так как в иной формулировке эта теорема совпадает, очевидно, с утверждением о дополняемости инвариантных * силовских П-подгрупп в конечных группах, то в связи с ней естественно возникает вопрос о дополняемости инвариантных силовских П-подгрупп в бесконечных группах. В случае произвольных бесконечных групп этот вопрос заведомо решается отрицательно; известно, например, что не всегда дополняемы силовские П-подгруппы смешанных абелевых групп.

Возможно, что интересующий нас вопрос решается положительно в случае произвольных периодических групп, однако автору неизвестно, решается ли он положительно даже при дополнительном предположении об их локальной конечности. При этом предположении в настоящей работе установлено лишь, что дополняемыми в периодических группах будут их инвариантные силовские П-подгруппы, удовлетворяющие некоторым специальным требованиям (см. теоремы 7, 8 и 9). Если же предположение о локальной конечности рассматриваемых групп заменить более сильным предположением об их локальной нормальности, то дополняемыми оказываются уже их произвольные инвариантные силовские П-подгруппы (см. теорему 3). Этот результат получен как пример приложения локальной теоремы 2 об условиях дополняемости арифметически замкнутых силовских П-подгрупп в локально нормальных группах.

В качестве другого примера приложения этой же теоремы в настоящей работе получается предложение о том, что локально нормальная группа тогда и только тогда локально разрешима, когда все ее силовские подгруппы дополняемы в ней (теорема 6). Это предложение распространяет известную теорему Ф. Холла о конечных разрешимых группах ([2]) на любые локально нормальные группы с разрешимыми конечными подгруппами.

1. Силовскую П-подгруппу $\mathfrak{A}$ группы $\mathfrak{G}$ назовем *арифметически замкнутой в* $\mathfrak{G}$, если ее индекс в произвольной содержащей ее подгруппе группы $\mathfrak{G}$ либо конечен, но не делится ни на одно простое число из множества П, либо бесконечен.

Если силовская П-подгруппа произвольной группы $\mathfrak{G}$ является ее нормальным делителем, то она, очевидно, арифметически замкнута в $\mathfrak{G}$.

* В настоящей статье нормальный делитель группы называется также ее инвариантной подгруппой.

Другие примеры арифметически замкнутых силовских П-подгрупп даются следующими предложениями.

Каждая силовская П*-подгруппа локально разрешимой группы* (*т. е. группы, в которой каждое конечное множество элементов порождает разрешимую подгруппу*) *арифметически замкнута в ней.*

Каждая силовская подгруппа произвольной группы $\mathfrak{G}$ (*т. е. силовская* П*-подгруппа при множестве* П, *состоящем лишь из одного простого числа*) *арифметически замкнута в* $\mathfrak{G}$.

В случае локально нормальных групп имеет место следующий критерий арифметической замкнутости силовских П-подгрупп.

Теорема 1. *Силовская* П*-подгруппа* $\mathfrak{A}$ *локально нормальной группы* $\mathfrak{G}$ *тогда и только тогда арифметически замкнута в* $\mathfrak{G}$, *когда ее пересечение с произвольным конечным нормальным делителем* $\mathfrak{N}$ *группы* $\mathfrak{G}$ *является арифметически замкнутой силовской* П*-подгруппой последнего.*

2. Лемма 1. *Если подгруппа* $\mathfrak{A}$ *группы* $\mathfrak{G}$ *дополняема в* $\mathfrak{G}$, *то она дополняема также в каждой содержащей ее подгруппе* $\mathfrak{R}$ *из* $\mathfrak{G}$; *если* $\mathfrak{B}$ — *дополнение подгруппы* $\mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{G}$, *то пересечение* $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{R}$ *является дополнением* $\mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{R}$.

Лемма 2. *Пусть* П — *некоторое множество простых чисел и* П′ — *множество тех простых делителей порядков элементов локально нормальной группы* $\mathfrak{G}$, *которые не содержатся в множестве* П. *Если силовская* П*-подгруппа* $\mathfrak{A}$ *группы* $\mathfrak{G}$ *арифметически замкнута и дополняема в* $\mathfrak{G}$ *и множество* П′ *не пустое, то ее дополнение* $\mathfrak{B}$ *в* $\mathfrak{G}$ *является арифметически замкнутой силовской* П′*-подгруппой группы* $\mathfrak{G}$*.

Теорема 2. *В локально нормальной группе* $\mathfrak{G}$ *арифметически замкнутая силовская* П*-подгруппа* $\mathfrak{A}$ *тогда и только тогда дополняема, когда ее пересечение с произвольным конечным нормальным делителем* $\mathfrak{N}$ *группы* $\mathfrak{G}$ *дополняемо в* $\mathfrak{N}$.

Следствие 1. *Пусть* $\mathfrak{G}$ — *локально нормальная группа и* П — *некоторое множество простых чисел. Если какая-нибудь силовская* П*-подгруппа группы* $\mathfrak{G}$ *арифметически замкнута и дополняема в ней, то в группе* $\mathfrak{G}$ *дополняема каждая арифметически замкнутая силовская* П*-подгруппа.*

Следствие 2. *Пусть* $\mathfrak{G}$ — *локально нормальная группа и* p — *некоторое простое число. Если какая-нибудь силовская* p*-подгруппа группы* $\mathfrak{G}$ *дополняема в* $\mathfrak{G}$, *то дополняемой в* $\mathfrak{G}$ *будет и каждая ее силовская* p*-подгруппа.*

Ввиду леммы 2 из теоремы 2 вытекает также

Следствие 3. *Если арифметически замкнутая силовская* П*-подгруппа* $\mathfrak{A}$ *локально нормальной группы* $\mathfrak{G}$ *дополняема в* $\mathfrak{G}$ *и* $\mathfrak{B}$ — *какое-нибудь из ее дополнений в группе* $\mathfrak{G}$, *то пересечения подгрупп* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *с произвольным конечным нормальным делителем* $\mathfrak{N}$ *из* $\mathfrak{G}$ *взаимно дополняют друг друга в* $\mathfrak{N}$.

3. Из теоремы 2 вытекает следующее обобщение теоремы Шура.

Теорема 3. *Если силовская* П*-подгруппа* $\mathfrak{A}$ *локально нормальной группы* $\mathfrak{G}$ *инвариантна в* $\mathfrak{G}$, *то она дополняема в* $\mathfrak{G}$. *Если множество* П′ *тех простых делителей порядков элементов группы* $\mathfrak{G}$, *которые не содержатся в множестве* П, *не пусто, то каждое из дополнений подгруппы* $\mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{G}$ *является арифметически замкнутой силовской* П′*-подгруппой группы* $\mathfrak{G}$.

Теорема 4. *Если локально нормальная группа* $\mathfrak{G}$ *локально разрешима, то каждая ее силовская* П*-подгруппа дополняема в ней.*

---

* Если множество П не содержит ни одного простого числа, делящего порядок хотя бы одного элемента группы $\mathfrak{G}$, то ее силовская П-подгруппа совпадает с ее единичной подгруппой.

Для конечной группы $\mathfrak{G}$ эта теорема доказана в работе ([3]).

Теорема 5. *Если локально нормальная группа $\mathfrak{G}$ обладает дополняемой силовской p-подгруппой для каждого простого числа p, то она локально разрешима.*

Теорема 6. *Локально нормальная группа тогда и только тогда локально разрешима, когда все ее силовские подгруппы дополняемы в ней.*

4. Теорема 7. *Если произведение какой-нибудь силовской Π-подгруппы $\mathfrak{A}$ локально конечной группы $\mathfrak{G}$ на ее централизатор $z(\mathfrak{A})$ в $\mathfrak{G}$ совпадает с $\mathfrak{G}$, то подгруппа $\mathfrak{A}$ является прямым множителем группы $\mathfrak{G}$.*

Следствие 1. *Локально конечная группа $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда совпадает с произведением какой-нибудь ее силовской Π-подгруппы $\mathfrak{A}$ на централизатор $z(\mathfrak{A})$ последней в группе $\mathfrak{G}$, когда каждый Π-элемент группы $\mathfrak{G}$ перестановочен с каждым элементом этой группы, имеющим порядок, не делящийся ни на одно из чисел множества Π.*

Следствие 2. *Если в локально конечной группе $\mathfrak{G}$ каждый Π-элемент перестановочен с каждым элементом, порядок которого не делится ни на одно из чисел множества Π, то силовская Π-подгруппа группы $\mathfrak{G}$ является ее прямым множителем.*

5. Лемма 3. *В локально конечной группе инвариантная силовская Π-подгруппа конечного индекса дополняема.*

Это предложение является очевидным обобщением теоремы Шура.

Теорема 8. *Если произведение инвариантной силовской Π-подгруппы локально конечной группы $\mathfrak{G}$ на ее централизатор $z(\mathfrak{A})$ в $\mathfrak{G}$ имеет в $\mathfrak{G}$ конечный индекс, то подгруппа $\mathfrak{A}$ дополняема в $\mathfrak{G}$. В частности, если инвариантная силовская Π-подгруппа группы $\mathfrak{G}$ конечна, то она дополняема в $\mathfrak{G}$.*

Лемма 4. *В периодической группе $\mathfrak{G}$ централизатор каждого специального абелевого нормального делителя имеет конечный индекс.*

Это предложение вытекает из теоремы 2 работы ([4]) автора*.

Теорема 9. *Если инвариантная силовская Π-подгруппа $\mathfrak{A}$ локально конечной группы $\mathfrak{G}$ является расширением специальной полной абелевой группы при помощи конечной группы, то подгруппа $\mathfrak{A}$ дополняема в $\mathfrak{G}$.*

Следствие. *Если инвариантная силовская Π-подгруппа и, в частности, инвариантная силовская p-подгруппа, локально конечной группы $\mathfrak{G}$ специальна, то она дополняема в $\mathfrak{G}$.*

Молотовский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
24 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Курош, Теория групп, М., 1953. [2] Ph. Hall, J. London Math. Soc., **12**, 198 (1937). [3] Ph. Hall, J. London Math. Soc., **3**, 98 (1928). [4] С. Н. Черников, ДАН, **72**, № 2, 243 (1950). [5] С. Н. Черников, Матем. сборн., **6**, 199 (1939).

* В его формулировке в работе ([4]) (см. следствие 2 теоремы 2) специальный абелев нормальный делитель ошибочно назван слойно-конечным; аналогичная ошибка содержится также и в формулировке вытекающей из него теоремы 3 цитируемой работы.

Пользуясь случаем устранить также некоторые неточности в формулировке теоремы 4 той же работы, даю ниже ее новую формулировку:

Если хотя бы один из максимальных абелевых нормальных делителей бесконечной периодической группы $\mathfrak{P}$, обладающий возрастающим центральным рядом, является специальной группой, то специальной будет также и группа $\mathfrak{P}$.

Под специальной группой здесь и выше (а также ниже в теореме 9 и ее следствии) понимается, в соответствии с работой ([5]) автора, группа, обладающая возрастающим центральным рядом и удовлетворяющая условию минимальности для подгрупп.