Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 4

МАТЕМАТИКА

М. А. ЕВГРАФОВ

АНАЛОГ ТЕОРИИ ФРЕДГОЛЬМА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ПУАНКАРЕ О РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЯХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 11 XII 1954)

Рассмотрим операторы

$$A(F)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r}K(z,t)F(t)\,dt,\quad A^*(\Phi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r}K(t,\zeta)\Phi(t)\,dt,$$

где

$$K(z,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_{n,k}\frac{z^k}{\zeta^{n+1}},\quad |z|<\rho<|\zeta|,\quad R_0<\rho<R_1;$$

$$\sup_{0\leqslant n<\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|\varepsilon_{n,k}|\,r^{k-n}=\vartheta_1(r),\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=0}^{\infty}|\varepsilon_{n,k}|\,r^{k-n}=\vartheta(r);$$

$$\sup_{R_0<r<R_1}\vartheta_1(r)=\vartheta_1,\qquad \sup_{R_0<r<R_1}\vartheta(r)=\vartheta.$$

Операторы $A(F)$ и $A^*(\Phi)$ являются, соответственно, линейными непрерывными операторами в пространствах $\mathfrak{A}(|z|<r)$ и $\mathfrak{A}(|\zeta|>r)$, $R_0<r<R_1$ (3).

Теорема 1. *При* $|\lambda|<1/\vartheta_1$ *операторы* $E+\lambda A$ *и* $E+\lambda A^*$ *обратимы, соответственно, в пространствах* $\mathfrak{A}(|z|<r)$ *и* $\mathfrak{A}(|\zeta|>r)$, $R_0<r<R_1$, *причем обратные операторы также являются линейными непрерывными операторами в соответствующих пространствах и могут быть представлены в виде*

$$(E+\lambda A)^{-1}F=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r}R(z,t;\lambda)F(t)dt,$$

$$(E+\lambda A^*)^{-1}\Phi=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r}R(t,\zeta;\lambda)\Phi(t)\,dt \qquad (1)$$

и $R(z,\zeta;t)$ *является аналитической функцией своих переменных, регулярной при* $|z|<\rho<|\zeta|$, $R_0<\rho<R_1$, $|\lambda|<1/\vartheta_1$.

Теорема 2. *Функция* $R(z,\zeta;\lambda)$ *является аналитической функцией своих переменных, регулярной при* $|z|<\rho<|\zeta|$, $R_0<\rho<R_1$ *и мероморфной по* λ *в круге* $|\lambda|<1/\vartheta$. *Все полюса* $R(z,\zeta;\lambda)$ *простые.*

Теорема 3. *При каждом* λ, *не являющемся полюсом* $R(z,\zeta;\lambda)$, *операторы* $(E+\lambda A)^{-1}$ *и* $(E+\lambda A^*)^{-1}$ *даются формулой* (1), *а для* λ, *являющегося полюсом* $R(z,\zeta;\lambda)$, *ни один из обратных операторов*

не может существовать, так как существуют функции $\varphi(z) \in \mathfrak{A} \times (|z| < R_1)$ *и* $\psi(\zeta) \in \mathfrak{A}(|\zeta| > R_0)$, $\varphi(z) \not\equiv 0$, $\psi(\zeta) \not\equiv 0$, *удовлетворяющие условиям*

$$\varphi(z) + \frac{\lambda}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} K(z,t)\varphi(t)\,dt = 0, \quad R_0 < r < R_1;$$

$$\psi(\zeta) + \frac{\lambda}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} K(t,\zeta)\psi(t)\,dt = 0, \quad R_0 < r < R_1. \tag{2}$$

Теорема 4. *Число линейно независимых функций, удовлетворяющих уравнениям* (2), *конечно для всякого полюса* λ_i, $|\lambda_i| < 1/\vartheta$, *и одинаково для обоих уравнений. Все эти функции могут быть получены из функции*

$$Q_{\lambda_i}(z,\zeta) = \lim_{\lambda \to \lambda_i} (\lambda - \lambda_i) R(z,\zeta;\lambda)$$

при помощи линейных комбинаций.

Теорема 5. *Для разрешимости уравнения*

$$F(z) + \lambda A(F) = G(z), \quad F, G \in \mathfrak{A}(|z| < r),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} G(t)\psi(t)\,dt = 0$$

для любого решения уравнения

$$\psi(\zeta) + \lambda A^*(\psi) = 0, \quad \psi \in \mathfrak{A}(|\zeta| \geqslant r),$$

а для разрешимости уравнения

$$\Phi(\zeta) + \lambda A^*(\Phi) = \Gamma(\zeta), \quad \Phi, \Gamma \in \mathfrak{A}(|\zeta| > r)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} \Gamma(t)\varphi(t)\,dt = 0$$

для любого решения уравнения

$$\varphi(z) + \lambda A(\varphi) = 0, \quad \varphi(z) \in \mathfrak{A}(|z| \leqslant r).$$

При помощи перечисленных теорем удается установить ряд результатов, аналогичных результатам, полученным в [1,2], но более сильных.

Положим $\varphi_n(z) = z^n P(z) + z^{n+1}\varepsilon_n(z)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Здесь P и ε_n регулярны при $|z| < R$, а $\max\limits_{|z| \leqslant R_1 < R} |\varepsilon_n(z)| \to 0$ при $n \to \infty$. Далее обозначим через $\{\alpha_n\}$ последовательность нулей $P(z)$, лежащих в круге $|z| < R$, через $\{\rho_k\}$ — последовательность различных модулей нулей $P(z)$, $0 \leqslant \rho_1 < \rho_2 < \ldots$, а через m_k — число нулей $P(z)$ в круге $|z| \leqslant \rho_k$.

Теорема 6. *Существует ровно* m_k *линейно независимых функций* $\Phi_1(z), \ldots, \Phi_{m_k}(z)$, *регулярных при* $|z|<\rho_k$, *удовлетворяющих условиям*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \varphi_n(z)\,\Phi_m(z)\,dz = 0, \tag{3}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad 1 \leqslant m \leqslant m_k, \qquad \rho_k < r < \rho_{k+1}.$$

Теорема 7. *Для того чтобы функция* $F(z)$, *регулярная в круге* $|z|<r$, $\rho_k<r<\rho_{k+1}$, *могла быть разложена в ряд*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(z),$$

сходящийся в этом круге, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} F(z)\,\Phi_m(z)\,dz = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, m_k. \tag{4}$$

Теорема 8. *Если функция* $\Phi(z)$ *удовлетворяет условиям* (3) *и регулярна в точках* $z=\alpha_n$, $|\alpha_n|=\rho_k$, *то* $\Phi(z)$ *регулярна при* $|z|>\rho_{k-1}$.

Отсюда сразу же следует

Теорема 9. *Если* $\Phi(z)\not\equiv 0$ *и регулярна при* $|z|>R_1$, $R_1<R$, *то по меньшей мере одна из точек* α_n *является особой точкой* $\Phi(z)$.

Теорема 10. *Система* $\{\varphi_n(z)\}$ *полна в любой конечной односвязной области, не содержащей ни одной из точек* α_n.

Теорему 9 можно рассматривать как обобщение теоремы Пуанкаре о разностных уравнениях с предельно постоянными коэффициентами.

Московский
физико-технический институт

Поступило
6 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Евграфов, Изв. АН СССР, сер. матем., **17**, 421 (1953). [2] М. А. Евграфов, ДАН, **98**, № 4 (1954). [3] М. А. Евграфов, ДАН, **98**, № 5 (1954).