Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 4

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР И. Н. ВЕКУА

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В основе предлагаемого метода лежит следующая идея. Предположим, что задача отыскания функции $u(x)$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющей в области T уравнению $\Delta^n u = \rho(x)$ и однородным краевым условиям $R_1(u)=0, \ldots, R_n(u)=0$, допускает решение для любой функции $\rho(x) \in L_p(T)$, $p \geqslant 1$, причем решение представляется в форме

$$u(x) \equiv S_0\rho = \int_T G(x, \xi)\rho(\xi)\, d\xi, \quad d\xi = d\xi_1 \ldots d\xi_n. \tag{1}$$

Эта задача в настоящее время хорошо изучена для ряда краевых условий ([1-3]). Важно отметить, что для случая, когда T — сфера и $R_k \equiv \partial^{k-1}/\partial\nu^{k-1}$ (ν — нормаль граничной поверхности), функция G строится в явном виде (см., например, ([1,2])).

Рассматривая теперь задачу отыскания решения более общего уравнения $F(x, u, Du, \ldots, D^{2n}u)=0$ ($D^p u \equiv \{\partial^p u/\partial x_{k_1} \ldots \partial x_{k_p}\}$) с теми же граничными условиями $R_1(u)=0, \ldots, R_n(u)=0$, мы можем искать ее решение в виде (1). Это приведет нас для $\rho(x)$ к функциональному уравнению $F(x, S_0\rho, \ldots, S_{2n}\rho)=0$ с операторами $S_k\rho \equiv D^k S_0\rho$ ($k=0, 1, \ldots, 2n$).

Операторы $S_k\rho$ линейны и вполне непрерывны при $k \leqslant 2n-1$. Что же касается операторов $S_{2n}\rho$, то их ограниченность в L_p, $p>1$, доказывается при помощи одного неравенства Зигмунда и Кальдерона ([4]), обобщающего известное неравенство Рисса ([5]) для сингулярного оператора с ядром типа Коши. Таким путем задача с неограниченными операторами $D^k u$ сводится к эквивалентной ей задаче изучения функционального уравнения $F(x, S_0\rho, \ldots, S_{2n}\rho)=0$ с ограниченными операторами $S_k\rho$. При помощи основных принципов функционального анализа удается доказать разрешимость этого уравнения для весьма широкого круга задач для линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений эллиптического типа. Следует отметить, что этот метод позволяет изучать краевые задачи при минимальных предположениях в отношении коэффициентов уравнения и области. Кроме того, пользуясь теоремами вложения С. Л. Соболева ([3]), при помощи формулы (1) можно доказать почти предельно точные теоремы о характере гладкости обобщенного решения в зависимости от степени гладкости коэффициентов (этому вопросу посвящена работа К. Фридрихса ([7]), где приведена также довольно полная библиография вопроса; см. еще ([6,8,9])).

Ниже мы излагаем вкратце обоснование описанного метода для квазилинейных уравнений вида

$$a(x, y, u, u_x, u_y)\, u_{xx} + 2b(x, y, u, u_x, u_y)\, u_{xy} + c(x, y, u, u_x, u_y)\, u_{yy} + d(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \tag{2}$$

В этой работе мы рассмотрим первую краевую задачу для односвязной области, ограниченной в достаточной мере гладкой кривой. Именно, будем считать, что посредством непрерывного преобразования $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$ область можно гомеоморфно отобразить на круг $\xi^2 + \eta^2 < 1$, причем первые производные от φ и ψ непрерывны, а вторые производные ограничены в замкнутой области. В таком случае задачу можно привести к задаче Дирихле для уравнения (2) в случае круга $x^2 + y^2 < 1$. В дальнейшем этот круг будем обозначать через Γ, а его окружность — через γ. Кроме того, мы будем считать, что краевое условие приведено к виду $u|_\gamma = 0$. Для этого достаточно, чтобы заданная на контуре функция имела по дуге непрерывные производные первого и второго порядков.

Вводя в рассмотрение комплексные производные $u_x + iu_y = 2u_{\bar z}$, $u_x - iu_y = 2u_z$ $(z = x + iy)$, уравнение (2) можем записать так:

$$u_{z\bar z} + \operatorname{Re}[A(z,u,u_z)u_{zz}] + B(z,u,u_z) = 0. \qquad (2')$$

В отношении A и B примем следующие ограничения: 1) $A(z,u,v)$ — измеримая функция при $z \in \Gamma$, $-\infty < u < \infty$, $|v| \geqslant 0$, причем для любого $M > 0$ существует такая положительная постоянная $q = q(M) < 1$, что $|A(z,u,v)| \leqslant q < 1$ при $|u| + |v| < M$ почти для всех $z \in \Gamma$; 2) $B(z,u,v)$ — измеримая функция при $z \in \Gamma$, $-\infty < u < \infty$, $|v| \geqslant 0$, причем $B(z,0,0) \in L_p(\Gamma)$, $p > 2$; 3) $|A(z,u_1,v_1) - A(z,u_2,v_2)| \leqslant A_0(z)|u_1 - u_2| + A_1(z)|v_1 - v_2|$, где A_0 и A_1 — неотрицательные измеримые функции, причем $\operatorname{vrai\,sup} A_i(z) = M_i < \infty$ $(i = 0, 1)$; 4) $|B(z,u_1,v_1) - B(z,u_2,v_2)| \leqslant B_0(z)|u_1 - u_2| + B_1(z)|v_1 - v_2|$, где B_0, $B_1 \in L_p(\Gamma)$, $p > 2$.

Будем говорить, что $u(x,y)$ есть решение уравнения (2), если u_z, u_{zz} и $u_{z\bar z}$ существуют в обобщенном смысле С. Л. Соболева ([3]) и уравнение выполняется почти везде в Γ.

Решение поставленной задачи можем искать в виде

$$u(x,y) = \iint_\Gamma G(z,\zeta)\rho(\zeta)\,d\xi\,d\eta \equiv S_0\rho, \qquad G = \frac{2}{\pi}\lg\frac{|z-\zeta|}{|1-z\bar\zeta|}, \qquad (3)$$

где $\rho(\zeta)$ — вещественная функция точки $\zeta = \xi + i\eta$, принадлежащая $L_p(\Gamma)$, $p \geqslant 1$.

Если $\rho \in L_p$, $p > 2$, то функции $u = S_0\rho$ и

$$u_z \equiv S_1\rho = \iint_\Gamma \frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial z}\rho(\zeta)\,d\xi\,d\eta, \qquad G_z = -\frac{1}{\pi(\zeta - z)} + \frac{\bar\zeta}{\pi(1 - z\bar\zeta)} \qquad (4)$$

непрерывны в $\Gamma + \gamma$, причем: 1) $u|_\gamma = 0$; 2) $|S_0\rho| \leqslant K_0\|\rho\|_p$, $|S_1\rho| \leqslant K_1\|\rho\|_p$; 3) $S_1\rho \in \operatorname{Lip}\alpha$, $\alpha = \dfrac{p-2}{p}$. Существуют также обобщенные вторые производные, которые вычисляются по формулам

$$u_{z\bar z} = \rho,\ u_{zz} \equiv S_2\rho = \iint_\Gamma \frac{\partial^2 G(z,\zeta)}{\partial z^2}\rho(\zeta)\,d\xi\,d\eta, \qquad (5)$$

причем последний интеграл следует понимать в смысле главного значения по Коши. На основании неравенства Зигмунда и Кальдерона ([4]) можно доказать, что $\|S_2\rho\|_p \leqslant A_p\|\rho\|_p$, $p > 1$. Мы доказываем, что $A_2 = 1$. Это важное для дальнейшего равенство вытекает из следующей формулы:

$$(S_2\rho, S_2\rho) = (\rho,\rho) - \frac{1}{\pi}\iint_\Gamma \rho(x,y)\,dx\,dy \iint_\Gamma \frac{1 + z\bar\zeta}{1 - z\bar\zeta}\rho(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta, \quad \rho \in L_2. \qquad (6)$$

Внося (3) в (2), для ρ получим уравнение

$$\rho(x, y) + \operatorname{Re}[A(z, S_0\rho, S_1\rho) S_2\rho] + B(z, S_0\rho, S_1\rho) \equiv \rho - P\rho = 0. \quad (7)$$

Оператор $P\rho$ переводит L_p в L_p, если $p > 2$. Кроме того, если учесть наложенные на A и B условия, то при $(K_0 + K_1)\|\rho_1\| \leqslant M$ будем иметь:

$$\|P\rho_1 - P\rho_2\|_p \leqslant \{q(M) A_p + (K_0M_0 + K_1M_1) A_p \|\rho_2\|_p + \\ + K_0\|B_0\|_p + K_1\|B_1\|_p\} \|\rho_1 - \rho_2\|_p. \quad (8)$$

Так как A_p непрерывно зависит от p и $A_2 = 1$, то можно указать такое $\varepsilon = \varepsilon(M) > 0$, что при $0 < p - 2 \leqslant \varepsilon$ $q(M) A_p < 1$. Пусть $r > 0$ и $\delta > 0$ — числа, удовлетворяющие неравенствам $(K_0 + K_1) r < M$ и $\alpha \equiv q(M) A_p + (K_0M_0 + K_1M_1) r + (K_0 + K_1)\delta < 1$. Если теперь $\|B_0\|_p < \delta$ и $\|B_1\|_p < \delta$, то, в силу (8), для любых ρ_1 и ρ_2 ($\|\rho_1\|$, $\|\rho_2\| \leqslant r$) имеем неравенство

$$\|P\rho_1 - P\rho_2\|_p \leqslant \alpha\|\rho_1 - \rho_2\|_p, \quad \alpha < 1. \quad (9)$$

Допустим теперь, что $\|B(z, 0, 0)\|_p < (1 - \alpha) r$. Тогда, согласно обобщенному принципу сжатых отображений, приходим к заключению, что существует единственное решение уравнения $\rho = P\rho$, причем $\rho \in L_p(\Gamma)$, $\|\rho\|_p \leqslant r$, $p > 2$.

Таким образом, если $B(z, 0, 0)$, $B_0(z)$ и $B_1(z)$ в достаточной мере малы по норме L_p, $p > 2$, то задача Дирихле для квазилинейного уравнения (2) с краевым условием $u|_\gamma = 0$ имеет единственное (обобщенное) решение, которое выражается по формуле (3). Это решение непрерывно и имеет непрерывные частные производные первого порядка, принадлежащие $\operatorname{Lip}\beta$, $\beta = \frac{p-2}{p}$.

Рассмотрим особо случай линейного уравнения:

$$L(u) \equiv au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g, \quad (10)$$

где a, b, c — ограниченные измеримые функции переменных x, y, причем $ac - b^2 \geqslant k > 0$ почти везде в Γ и $a + c = 1$, $d, e, f, g \in L_p(\Gamma)$, $p > 2$. В этом случае оператор $P\rho$ линеен, и оценка (8) принимает вид

$$\|P\rho_1 - P\rho_2\|_p \leqslant \{qA_p + K_0\|f\|_p + K_1(\|d\|_p + \|e\|_p)\} \|\rho_1 - \rho_2\|_p, \quad (11)$$

где $0 \leqslant q \leqslant \sqrt{1 - 4k} < 1$. Если d, e, f удовлетворяет неравенству $qA_p + K_0\|f\|_p + K_1(\|d\|_p + \|e\|_p) < 1$ (чего всегда можно добиться, ибо $qA_p < 1$ при $0 < p - 2 \leqslant \varepsilon$), то задача Дирихле для уравнения (10) имеет единственное решение, которое выражается формулой (3). В частности, при $f = d = e = 0$ это условие всегда выполнено, и, следовательно, задача Дирихле ($u|_\gamma = 0$) для уравнения $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = g$ всегда имеет единственное решение.

Для уравнения (10) оператор $P\rho = P_0\rho + T\rho + g$, где $P_0\rho = -\operatorname{Re}[(a - c + 2ib) S_2\rho]$, $T\rho = -\operatorname{Re}[(d + ie) S_1\rho] - fS_0\rho$. Так как $\|P_0\rho\|_p \leqslant qA_p\|\rho\|_p$ и $qA_p < 1$, то $I - P_0$ имеет обратный $P_* = (I - P_0)^{-1}$, который также линеен в L_p, $p > 2$. Следовательно, уравнение $\rho - P\rho = 0$ приводится к эквивалентному уравнению $\rho - T_*\rho = P_*g$ с вполне непрерывным оператором $T_* = P_*T$, для которого справедлива альтернатива Фредгольма. Отсюда следует, что задача Дирихле для уравнения (10) всегда разрешима, если имеет место единственность решения (для этого достаточно, например $f \leqslant 0$).

Если $a, b, c, d, e, f, g \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, то можно доказать, что решение ρ уравнения $\rho - T_*\rho = P_*\rho$ также принадлежит $\mathrm{Lip}\,\alpha$. В таком случае при помощи формулы (3) доказывается, что $u \in C^2_\alpha(\Gamma)$. На основании этого результата доказывается более общая теорема:

Если $a, b, c, d, e, f, g \in C^m_\alpha(\Gamma)$, то решение задачи Дирихле для уравнения (10) принадлежит $C^{m+2}_\alpha(\Gamma)$.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
29 XII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Н. Векуа, Новые методы решения уравнений эллиптического типа, М.—Л., 1948. [2] M. Nicolesco, Les fonctions polyharmoniques, Paris, 1936. [3] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. [4] A. P. Calderon, A. Zygmund, Acta Math., **88**, No. 1—2 (1952). [5] M. Riesz, Math. Zs., **27**, 218 (1927). [6] L. Nirenberg, Comm. on Pure and Appl. Math., **6**, No.1, 103 (1953). [7] K. O. Fridrichs, ibid., **6**, No. 1, 299 (1953). [8] О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболических уравнений, М., 1953. [9] E. Hopf, Math. Zs., **34**, 194 (1932).