Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 1

ГЕОФИЗИКА

Член-корреспондент АН СССР И. А. КИБЕЛЬ

О ПРИСПОСОБЛЕНИИ ДВИЖЕНИЯ ВОЗДУХА К ГЕОСТРОФИЧЕСКОМУ

При краткосрочном прогнозе погоды методами динамической метеорологии существенно уметь предсказать значения горизонтальных скоростей u и v и величины геопотенциала H. При обычных метеорологических допущениях можно считать, что u, v и H удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{du}{dt} - \frac{\zeta^2}{c^2}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \zeta} = -\frac{\partial H}{\partial x} + lv,$$

$$\frac{dv}{dt} - \frac{\zeta^2}{c^2}\frac{\partial v}{\partial \zeta}\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \zeta} = -\frac{\partial H}{\partial y} - lu, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\zeta^2 \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \zeta}\right) = c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Здесь в качестве независимых переменных взяты горизонтальные координаты x и y, приведенное давление $\zeta = p/P$ (p — давление, P — стандартное давление на уровне моря) и время t; l — параметр Кориолиса; $c^2 = \alpha RT$; R — газовая постоянная; T — средняя температура; $\alpha = (\gamma_a - \gamma)R/g$ (g ускорение силы тяжести, γ — средний вертикальный температурный градиент, γ_a — адиабатический градиент). Поверхность Земли считается горизонтальной плоскостью. Символ d/dt означает:

$$d/dt = \partial/\partial t + u\,\partial/\partial x + v\,\partial/\partial y.$$

В качестве краевых условий принимается ограниченность величины $\zeta\,\partial^2\Phi/\partial\zeta\,\partial t$ при $\zeta = 0$ и условие

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \zeta} + \alpha H\right) = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 1\ *. \qquad (2)$$

Движение, при котором $u = -\frac{1}{l}\frac{\partial H}{\partial y}$, $v = \frac{1}{l}\frac{\partial H}{\partial x}$, назовем геострофическим. Постоянная близость (но не равенство) ветра к геострофическому—один из наиболее проверенных фактов метеорологической практики. Факт этот кладется в основу современного способа прогноза геопотенциала H, когда решение задачи ищется в виде разложения по степеням малого параметра, стоящего в (1) при старших производных по времени ([1]); при этом первый член разложения дает геострофическое движение. Изучение процесса приспособления ветра к геострофическому представляет значительный интерес. В настоящей работе мы рассматриваем линеари-

* Это условие получается из равенства нулю вертикальной скорости на поверхности Земли. Условие записывается обычно приближенно при $\zeta = 1$, а не на поверхности Земли.

зированную систему (1) и даем для нее доказательство приспособления движения к геострофическому. В работе А. М. Обухова [2] аналогичный вопрос был рассмотрен для атмосферы, стянутой в горизонтальную пленку.

Линеаризированная система (1) имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x} + lv; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial y} - lu, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\zeta^2 \frac{\partial^2 H}{\partial \zeta\, \partial t}\right) = c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right). \tag{4}$$

При этом краевые условия примут вид:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \zeta\, \partial t} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 1\ *; \tag{5}$$

$$\zeta \frac{\partial^2 H}{\partial \zeta\, \partial t} \text{ ограничено при } \zeta = 0. \tag{6}$$

Разобьем поле скоростей на части потенциальную и соленоидальную:

$$u = \frac{\partial \varphi}{dx} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{7}$$

и будем искать вместо u и v функции φ и ψ. По (3) получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -H + l\psi, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -l\varphi, \tag{9}$$

а уравнение (4) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\zeta^2 \frac{\partial^2 H}{\partial \zeta\, \partial t}\right) = c^2 \Delta \varphi, \tag{10}$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Пусть в момент $t = 0$

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0, \quad \psi|_{t=0} = \psi_0, \quad H|_{t=0} = H_0 \tag{11}$$

(известные функции от x, y, ζ). Требуется найти движение, которое возникает; при этом должны удовлетворяться условия (5) и (6).

Исключая из (8), (9) и (10) ψ и H, получим для φ уравнение

$$c^2 \Delta \varphi + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + l^2 \varphi\right)\right] = 0. \tag{12}$$

Используя (11) и (8), получим для φ начальные условия

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0, \quad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{t=0} = -H_0 + l\psi_0. \tag{13}$$

Интегрируя (10) по ζ, используя (5) и (6), получим для φ краевое условие в виде

$$\int_0^1 \varphi\, d\zeta = 0. \tag{14}$$

Введем в качестве искомой функции

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \int_0^\zeta \varphi\, d\zeta, \tag{15}$$

---

* Мы пренебрегаем малым членом, содержащим безразмерный параметр α ($\alpha \approx 0{,}1$).

а в качестве независимой переменной вместо ζ введем $\xi = \ln \frac{1}{\zeta}$. Тогда (12) сведется к уравнению

$$c^2 \Delta \Phi + \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + l^2 \Phi \right) = 0. \tag{16}$$

при краевых условиях:

$$\text{при} \quad \xi = 0 \quad \Phi = 0; \qquad \text{при} \quad \xi = \infty \quad \Phi \text{ ограничено.} \tag{17}$$

Начальными условиями будут:

$$\Phi \big|_{t=0} = \Phi_0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{t=0} = \Phi_1, \tag{18}$$

где Φ_0 и Φ_1 находятся по (13) и (15).

Для отыскания решения мы применили обычный метод Фурье. Решение, удовлетворяющее (17) и (18), имеет вид (мы возвращаемся к старому переменному ζ):

$$\Phi(x, y, \zeta, t) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2lt} G_1(r, \zeta, \zeta' t) \Phi_0 \, dr \, d\zeta' d\delta + \right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2lt} G_1(r, \zeta, \zeta', t) \Phi_1 \, dr \, d\zeta' d\delta \right], \tag{19}$$

где

$$r^2 = \frac{l^2}{c^2} \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 \right];$$

$$x' = x + \frac{c}{l} r \cos \delta, \quad y' = y + \frac{c}{l} r \sin \delta;$$

$$G_1 = \frac{1}{2\zeta'} \Bigg|_{\eta = \left(\frac{1}{r} \ln \frac{\zeta'}{\zeta} \right)^2}^{\eta = \left(\frac{\ln \zeta \zeta'}{r} \right)^2} \left\{ \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(l^2 t^2 - \frac{r^2}{4} \right) \eta}{r^2 (1 + \eta)} \right] J_0 \left(\sqrt{l^2 t^2 - \frac{r^2}{4}} \sqrt{1 + \eta} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{(1 - \eta) \sqrt{l^2 t^2 - \frac{r^2}{4}}}{r^2 (1 + \eta) \sqrt{1 + \eta}} J_1 \left(\sqrt{l^2 t^2 - \frac{r^2}{4}} \sqrt{1 + \eta} \right) \right\}. \tag{20}$$

Если в начальный момент φ и $\partial \varphi / \partial t$ отличны от нуля в некоторой ограниченной области, то по (19) и (20) Φ будет стремиться к нулю с возрастанием времени. Это же относится к φ и $\partial \varphi / \partial t$. Но в таком случае по (8) мы получим при $t \to \infty$ $H \to l\psi$, и по (7) движение становится геострофическим.

Интересно, что можно найти значения H и ψ при $t \to \infty$ — мы назовем их H_∞ и ψ_∞ — не определяя промежуточных значений H и ψ. Действительно, исключая φ из (9) и (10), получим сперва для любого момента времени

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial^2 H}{\partial \zeta \, \partial t} \right) + \frac{c^2}{l^2} \Delta \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0. \tag{21}$$

Отсюда для любого момента времени

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial H}{\partial \zeta} \right) + \frac{c^2}{l} \Delta \psi = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial H_0}{\partial \zeta} \right) + \frac{c^2}{l} \Delta \psi_0. \tag{22}$$

Но тогда при $t \to \infty$, заменяя в (22) ψ_∞ на $\frac{1}{l} H_\infty$, мы получим

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial H_\infty}{\partial \zeta} + \frac{c^2}{l^2} \Delta H_\infty = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial H_0}{\partial \zeta} \right) + \frac{c^2}{l} \Delta \psi_0 \tag{23}$$

или для разности

$$H'(x, y, \zeta) = H_\infty(x, y, \zeta) - H_0(x, y, \zeta), \tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial H'}{\partial \zeta} \right) + \frac{c^2}{l^2} \Delta H' = \frac{c^2}{l} \Delta \left(\psi_0 - \frac{1}{l} H_0 \right). \tag{25}$$

Краевое условие, по (5), имеет вид:

$$\frac{\partial H'}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 1. \tag{26}$$

Решением (25) будет

$$H'(x, y, \zeta) = \frac{l^2}{2\pi c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 G_2(r, \zeta, \zeta') (l\psi_0 - H_0) \, d\zeta' dx' dy',$$

где

$$r^2 = \frac{l^2}{c^2} [(x' - x)^2 + (y' - y)^2],$$

$$G_2(r, \zeta, \zeta') = -\frac{1}{2\sqrt{\zeta\zeta'}} \left\{ \left[\eta_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{R_1} \right) + \frac{R_1}{2} \right]^2 + 1 - \frac{r^2}{R_1} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{R_1} \right) \right\} \frac{e^{-1/2 R_1}}{R_1^3} -$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{\zeta\zeta'}} \left\{ \frac{1}{R_2} \left(1 + \frac{2}{R_2} \right) - r^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2R_2} + \frac{3}{R_2^2} \right) \right\} \frac{e^{-1/2 R_2}}{R_2^3},$$

причем $\eta_1 = \ln \frac{1}{\zeta\zeta'}$, $\eta_2 = \ln \frac{\zeta'}{\zeta}$, $R_1^2 = \eta_1^2 + r^2$, $R_2^2 = \eta_2^2 + r^2$.

Центральный институт прогнозов

Поступило 20 V 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. А. Кибель, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 5, 628 (1940). М. А. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 13 № 4, 281 (1949).