Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 4

МАТЕМАТИКА

Ф. С. ВАХЕР

О БАЗИСЕ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА КОМПАКТЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 I 1955)

Базис в пространстве непрерывных функций, определенных на отрезке числовой прямой, был построен Шаудером ([1]). В настоящей статье доказывается существование базиса в пространстве $C(Q)$ непрерывных функций, определенных на произвольном компакте Q; для некоторых пространств $C(Q)$, в частности, когда Q — гильбертов кирпич, дается непосредственное построение базиса.

§ 1. Пусть H — гильбертово пространство; последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — ортогональный базис в H; $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ — последовательность линейных функционалов такая, что $F_k(x_i) = 0$ для $i \neq k$, $F_k(x_k) = 1$; K — гильбертов кирпич пространства H.

Введем следующие определения и обозначения.

Гиперплоскостью будем называть множество точек, для которых выполняется $F(x) = c$.

Гиперплоскость, определенную уравнением $F_n(x)=c$, будем называть гиперплоскостью n-го направления.

Множество точек $x \in H$, удовлетворяющих неравенству $b_1 \leqslant F_n(x) \leqslant b_2$, будем называть полосой n-го направления и обозначать E^n. Число $\alpha_n = |b_2 - b_1|$ будем называть шириной полосы E^n.

Пересечение полос 1-го, ..., n-го направлений будем называть параллелепипедом n-го порядка и обозначать $H^{(n)}$. Число $\alpha = \max\limits_n \alpha_n$ будем называть размером параллелепипеда $H^{(n)}$ и обозначать $r(H^{(n)})$.

Множество $L \subset H$ будем называть ограниченным по индексу n, если L содержится в некотором параллелепипеде n-го порядка.

Ограниченное по индексу n множество, содержащее сферу пространства H и являющееся пересечением конечного числа замкнутых полупространств $\overline{H}_i$ вида: $\overline{H}_i = E\,[\alpha_1^i F_1(x) + \ldots + \alpha_n^i F_n(x) \leqslant c^i \text{ (или } \geqslant c^i)]$ будем называть фигурой n-го порядка и обозначать $\square^n$.

Пересечение k гиперплоскостей $G_1, \ldots, G_k$, где

$$G_t = E\,[\alpha_1^t F_1(x) + \alpha_2^t F_2(x) + \ldots + \alpha_n^t F_n(x) = c^t]$$

и система $\alpha_1^t F_1(x) + \ldots + \alpha_n^t F_n(x) = c^t$, $t = 1, 2, \ldots, k$, линейно независима, будем называть гиперплоскостью k-го порядка по индексу n.

Часть гиперплоскости k-го порядка по индексу n, ограничивающую фигуру $\square^{(n)}$, будем называть гранью k-го порядка фигуры $\square^{(n)}$.

Грань n-го порядка фигуры $\square^{(n)}$ будем называть ее вершиной.

Фигуру n-го порядка, имеющую $n+1$ вершину, будем называть элементарной фигурой n-го порядка и обозначать $\triangle^{(n)}$.

§ 2. Лемма 1. *Пусть параллелепипед $H^{(n)}$ допускает разбиение*

$$H^{(n)} = \square_1^{(n)} \cup \square_2^{(n)} \cup \ldots \cup \square_k^{(n)}, \qquad (1)$$

обладающее следующим свойством: две фигуры из разбиения (1) *либо вовсе не пересекаются, либо их пересечение является гранью каждой из них* (*указанное свойство будем называть свойством* (*e*)).

Тогда возможно новое разбиение

$$H^{(n)} = \triangle_1^{(n)} \cup \triangle_2^{(n)} \cup \ldots \cup \triangle_t^{(n)}, \qquad (2)$$

также обладающее свойством (*e*), *причем каждая элементарная фигура разбиения* (2) *содержится в какой-нибудь из фигур первоначального разбиения* (1).

Доказательство этого факта производится при помощи отображения P пространства H на n-мерное евклидово пространство. При этом отображении образом параллелепипеда $H^{(n)}$ является тело S полиэдрального комплекса R. Следовательно, S есть также тело некоторой триангуляции T, являющейся барицентрическим подразделением комплекса R. Элементы разбиения (2) являются прообразами элементов триангуляции T, в частности, элементарная фигура n-го порядка есть прообраз n-мерного симплекса. Все свойства триангуляции T при отображении P^{-1} переносятся на разбиение (2), откуда следует лемма 1.

Вершины всех элементарных фигур разбиения (2) называем вершинами этого разбиения.

§ 3. Производим построение специальных функций, из которых в дальнейшем строится базис. Предварительно определяем элементарные функции следующим образом: пусть $\triangle^{(n)}$ — элементарная фигура n-го порядка; $G_i^{(n)}$ — ее вершина; G_i — грань 1-го порядка, противоположная вершина $G_i^{(n)}$, и пусть $F_k(x) = a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — уравнение вершины $G_i^{(n)}$; $F^i(x) = \alpha_1^i F_1(x) + \ldots + \alpha_n^i F_n(x) = a$ — уравнение гиперплоскости G_i, содержащей грань $\overline{G}_i$.

Функцию $\varphi_i(x) = \dfrac{F^i(x) - \alpha}{b - a}$ (где $b = \alpha_1^i a_1 + \ldots + \alpha_n^i a_n$) назовем элементарной функцией фигуры $\triangle^{(n)}$ с центром в вершине $G_i^{(n)}$.

Пусть произведено правильное разбиение параллелепипеда $H^{(n)}$; $G_i^{(n)}$ — одна из вершин этого разбиения; $\triangle_1^{(n)}, \triangle_2^{(n)}, \ldots, \triangle_r^{(n)}$ — элементарные фигуры разбиения, содержащие вершину $G_i^{(n)}$; $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x)$ — элементарные функции, соответствующие указанным элементарным фигурам с центром в вершине $G_i^{(n)}$. Функцию

$$\varphi_i^{(n)}(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{для } x \in \triangle_1^{(n)}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_r(x) & \text{для } x \in \triangle_r^{(n)}; \\ 0 & \text{для } x \in H \setminus (\triangle_1^{(n)} \cup \ldots \cup \triangle_r^{(n)}) \end{cases}$$

будем называть специальной функцией n-го порядка с центром в вершине $G_i^{(n)}$.

Лемма 2. *Специальная функция n-го порядка непрерывна и однозначна на параллелепипеде* $H^{(n)}$.

§ 4. Q — произвольный компакт. Опираясь на теорему Урысона, погружаем компакт Q в гильбертов кирпич K пространства Гильберта H.

Будем говорить, что гиперплоскость G касается компакта Q, если компакт Q весь расположен по одну сторону от G и $Q \cap G$ непусто.

Будем говорить, что компакт Q зажат в параллелепипед n-го порядка, если к Q проведено по 2 касательных гиперплоскости 1-го,..., n-го направлений.

Производим следующие построения: зажимаем компакт Q в полосу 1-го направления E' (E' — элементарная фигура 1-го порядка, касательные гиперплоскости G_1' и G_2' — ее вершины). В каждой из вершин G_1' и G_2' выбираем по одной точке кирпича: $x_1' \in G_1' \cap K$, $x_2' \cap G_2' \cap K$, и называем их центральными точками 1-го порядка; каждой центральной точке 1-го порядка приводим в соответствие специальную функцию 1-го порядка с центром в соответствующей вершине. Указанное построение называем 1-м дроблением.

Опираясь на результаты § 2, в предположении, что k-е дробление для всех $k \leqslant n$ уже построено, строим $(n+1)$-е дробление следующим образом: компакт Q зажимаем в параллелепипед $(n+1)$-го порядка $H^{(n+1)}$, совершаем разбиение параллелепипеда

$$H^{(n+1)} = \triangle_1^{(n+1)} \cup \triangle_2^{(n+1)} \cup \ldots \cup \triangle_i^{(n+1)} \tag{3}$$

такое, что: 1) каждая элементарная фигура разбиения (3) содержится в каком-нибудь из параллелепипедов $(n+1)$-го порядка, размер которого не превосходит $\frac{1}{2^n}$; 2) каждая элементарная фигура разбиения содержится в одной из элементарных фигур n-го дробления; 3) разбиение (3) обладает свойством (e).

Далее фиксируем все вершины разбиения (3), принадлежащие по крайней мере одной элементарной фигуре, внутренность которой содержит точки компакта Q. В каждой зафиксированной вершине, не содержащей центральных точек 1-го, . . . , n-го порядков, выбираем по одной точке кирпича. Выбранные точки называем центральными точками $(n+1)$-го порядка. Каждой центральной точке $(n+1)$-го порядка приводим в соответствие специальную функцию $(n+1)$-го порядка с центром в соответствующей вершине.

Продолжая построения указанным способом, построим счетную последовательность специальных функций

$$\varphi_1^1(x), \ldots, \varphi_1^k(x), \ldots, \varphi_{n_k}^k(x), \ldots \tag{4}$$

и, соответственно, выделим счетную последовательность центральных точек

$$x_1^1, \quad x_2^1, \ldots, x_1^k, \ldots, x_{n_k}^k, \ldots \tag{5}$$

Среди точек (5) могут быть и точки, не принадлежащие компакту Q, назовем их присоединенными.

Лемма 3. *Множество $\overline{Q} = Q \cup F$ (где F — множество присоединенных точек) является компактом.*

В ходе доказательства леммы 3 выясняется, что все точки F — изолированные в $\overline{Q}$.

Специальные функции ряда (4) индуцируют на компакте $\overline{Q}$ функции

$$\tilde{\varphi}_1^1(x), \ldots, \tilde{\varphi}_t^k(x), \ldots \tag{6}$$

Нетрудно убедиться, что функции (6) непрерывны на $\overline{Q}$.

§ 5. Теорема 1. *Последовательность* (6) *есть базис в пространстве $C(\overline{Q})$.*

Следствие. Если $Q = \overline{Q}$, в частности, когда $Q = K$, то последовательность (6) есть базис в пространстве $C(Q)$.

§ 6. Будем говорить, что множества Q_1 и Q_2 почти совпадают, если множество $Q_2 \setminus Q_1$ состоит из изолированных точек множества Q_2.

Теорема 2. *Если компакты Q_1 и Q_2 почти совпадают, то пространства $C(Q_2)$ и $C(Q_1) \times (c)$ изоморфны (где $C(Q_1) \times (c)$ — топологическое произведение пространства $C(Q_1)$ на пространство сходящихся последовательностей (c)).*

Теорема 3. *Пространства $C(Q_1)$ и $C(Q_1) \times (c)$ изоморфны.*

1. Из теорем 2 и 3 следует, что достаточным условием изоморфизма пространства $C(Q_1)$ и $C(Q_2)$ является почти совпадением компактов Q_1 и Q_2. Отсюда, в частности, следует изоморфизм пространств $C(\overline{Q})$ и $C(Q)$.

2. Из утверждения 1 и теоремы 1 следует существование базиса в пространстве $C(Q)$.

3. Нетрудно убедиться, что в пространстве $C^i(Q)$ непрерывных комплексных функций, определенных на компакте, также существует базис.

Следствие. Пусть R — сепарабельное нормированное коммутативное симметричное кольцо; R' — кольцо функций $x(M)$, определенных на множестве максимальных идеалов кольца R и порождаемых элементами кольца. Опираясь на теорему И. М. Гельфанда [2], заключаем: если из равномерной сходимости функций $x(M)$ следует сходимость соответствующих элементов кольца R по норме, то в кольце R существует базис.

Следуя М. Ш. Альтману [3], доказавшему аналогичную теорему для нормированного кольца с одной образующей, можно несколько ослабить условия существования базиса в R: если из равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{1,\infty}^{i} \alpha_i x_i(M)$ к функции $x(M)$ следует слабая сходимость ряда $\sum\limits_{1,\infty}^{i} \alpha_i x_i$ к элементу x, то в кольце R существует базис.

Среднеазиатский государственный университет

Поступило 14 III 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Schauder, Math. Zs., 26, 47 (1927). [2] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, Усп. матем. наук, 1, в. 2, 48 (1946). [3] М. Ш. Альтман, О β-кольцах, Кандидатск. диссертация, Среднеазиатск. гос. унив.