Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 3

МАТЕМАТИКА

Э. К. ФОГЕЛС

О ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ В НАЧАЛЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 31 I 1955)

В 1944 г. Ю. В. Линник (1) дал доказательство существования такой абсолютной постоянной $c>1$, для которой в промежутке $1<x<D^c$ находится по крайней мере одно простое число любой арифметической прогрессии $Du+l$ с $(D,\ l)=1,\ u=0,\ 1,\ \ldots$ В 1954 г. К. А. Родосский (2) нашел более простое доказательство, в котором вместо фундаментальных лемм Линника применялись следующие более слабые леммы:

1) Пусть $\psi \in \left[2;\ \frac{1}{10}\ln D\right]$ и $Q(D,\ \psi)$ — число L-функций с характерами по модулю D, имеющих каждая хоть один нуль в прямоугольнике

$$1-\psi/\ln D \leqslant \sigma < 1, \quad |t| \leqslant e^{\psi}/\ln D.$$

Тогда

$$Q(D,\ \psi) < e^{A_1\psi},$$

где постоянная A_1 (и в дальнейшем A, A_2, ...) не зависит от D.

2) Пусть по модулю D существует исключительный нуль $\tilde{\beta} > 1 - A_2/\ln D$. Тогда существуют такие постоянные A_3, A_4, что если $\rho=\beta+i\tau \neq \tilde{\beta}$ — нуль какой-либо L-функции с характером по модулю D с условием $|\tau| \leqslant 1$, $\tilde{\delta}=1-\tilde{\beta} < A_4/\ln D$, то

$$\beta \leqslant 1 - \frac{A_3}{\ln D}\ln\frac{eA_4}{\tilde{\delta}\ln D}.$$

Цель настоящей заметки отметить, что теми же средствами можно получить более сильную оценку для числа $\pi(x;\ D,\ l)$ простых чисел $\leqslant x$, $x \geqslant D^A$, арифметической прогрессии $Du+l$ $(u=0,1,\ \ldots;\ (D,\ l)=1)$. Для этого нужно пользоваться тождеством

$$\sum_{n=2}^{\infty} \chi(n)\Lambda(n)n^{-s}\exp\left(-\frac{\ln^2 n/X}{4N^2}\right) =$$

$$= \frac{iN}{\sqrt{\pi}}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{L'}{L}(w,\ \chi)X^{w-s}\exp\{(w-s)^2N^2\}\,dw \qquad (1)$$

$(X>0,\ N>0)$, которое при $X=1$ применяет Родосский. Повторяя рассуждения гл. III его работы с соответствующими изменениями (область $G_4^{(n)}$ следует заменить на $\frac{\psi_0+n}{\ln D} \leqslant 1-\sigma \leqslant \frac{\psi_0+n+1}{\ln D}$, $|t|<1$,

где $n = n_0,\ n_0 + 1,\ \ldots,\ n_1 < \ln D$ и $\psi_0 + n_0 \geqslant \ln \ln D$), вместо его формулы (11) получаем неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} X^{-3/2} \varphi(D) I_B \sum_{\substack{X<p<z \\ p \equiv l \pmod D}} N^{-1} \exp\left\{-\frac{\ln^2 p / X}{4N^2} - \frac{9}{4} N^2\right\} \sqrt{p} \ln p > A_5 D^{-1/2} > 0, \tag{2}$$

где $X = D^A$ $(A \geqslant 0)$, $N^2 = x \ln D$ $(x \geqslant x_0 \geqslant 4)$, $z = X \exp(4N^2)$ и I_B обозначает интегрирование по x в пределах $x,\ x+1$, повторенное B раз. Отсюда следует существование простого числа $p \equiv l \pmod D$, принадлежащего промежутку $(D^A,\ D^{A+4x})$. Поскольку x ограничено постоянной $\leqslant x_0 + B$, независимой от A, то следует:

Теорема 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует абсолютное постоянное $A = A(\varepsilon) > 24/\varepsilon$ такое, что в промежутке $(D^A,\ D^{A(1+\varepsilon)})$ находится по крайней мере одно простое число прогрессии $Du + l$ $(u = 0,\ 1,\ \ldots;\ (D,\ l) = 1)$.*

При $X = 1$ неравенство (2) доказывает формулированную в начале заметки теорему Линника.

Из (2) также следует неравенство

$$\sum_{\substack{D^A < p < D^{A+4(x_0+B)} \\ p \equiv l \pmod D}} \sqrt{p} \ln p > \frac{A_6}{\varphi(D)} D^{3/2 A - 1/2 + 3/4 x_0} \sqrt{x_0 \ln D}.$$

Заменяя здесь A на $A - 4(x_0 + B)$, получаем:

Теорема 2. *Для любого $\varepsilon < 0$ и для всех $A > A_0(\varepsilon) > 30/\varepsilon$ имеем*

$$\pi(D^A;\ D,\ l) > D^{A(1-\varepsilon)}.$$

Поступило
26 I 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. В. Линник, Матем. сборн., 15(57) 139, 347 (1944). [2] К. А. Родосский, Матем. сборн., 34 (76), 331 (1954).