Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 3

МАТЕМАТИКА

Г. Ш. РУБИНШТЕЙН

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 28 I 1955)

В настоящей заметке рассматривается метод исследования выпуклого множества, основанный на некотором частичном упорядочении его элементов; приводится ряд результатов из различных областей, полученных при помощи такого упорядочения. При этом мы не стремимся к полному исследованию затронутых вопросов, а лишь иллюстрируем метод.

Пусть E — вещественное линейное пространство([7]); $x, y \in E$; B — некоторая совокупность вещественных чисел. Множество $\underset{z}{E}[z = x + \lambda(y-x);\ \lambda \in B]$ называют прямой $\Pi(x, y)$ при $B = (-\infty, \infty)$ и, соответственно: отрезком $O[x, y]$, отрезком $O(x, y)$, лучом $\Lambda(x, y)$, противоположным лучом $\Lambda_{\text{п}}(x, y)$ при B равном: $[0, 1]$, $(0, 1)$, $(0, \infty)$, $(-\infty, 0)$.

На основании этих понятий легко определяются следующие: линейное многообразие, выпуклое множество, конус, гиперплоскость и так называемая $(*)$-топология (см. ([1])).

§ 1. Частичное упорядочение элементов выпуклого множества. Рассмотрим выпуклое $(*)$-замкнутое множество M (для выпуклого множества M $(*)$-замкнутость означает, что из $O(x, y) \subset M$ следует $O[x, y] \subset M$).

Если $x, y \in M$ и $\Lambda_{\text{п}}(y, x) \cap M \neq \Lambda$, условимся говорить, что x M-предшествует y или y M-следует за x (обозначение: $x \leqslant y$ или $y \geqslant x$). Когда справедливы оба соотношения: $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, будем говорить, что x M-эквивалентно y $(x \underset{M}{\equiv} y)$. И, наконец, x строго M-предшествует y, если $x \leqslant y$, но соотношение $y \leqslant x$ не выполняется.

Для каждого $x \in M$ определим:

$$L(x) \equiv \underset{y}{E}[\Lambda(x, y) \cap M \neq \Lambda;\ \Lambda_{\text{п}}(x, y) \cap M \neq \Lambda];$$

$$\Gamma(x) \equiv L(x) \cap M.$$

$L(x)$ — *линейное многообразие.* Действительно, если $y, z \in L(x)$, $u \in \Pi(y, z)$, то существуют точки $y_1, y_2, z_1, z_2 \in M$, расположенные, соответственно, на лучах $\Lambda(x, y)$, $\Lambda_{\text{п}}(x, y)$, $\Lambda(x, z)$, $\Lambda_{\text{п}}(x, z)$. Четырехугольник $y_1 z_1 y_2 z_2 \subset M$, так как M — выпуклое множество. Прямая $\Pi(x, u)$, имея общую точку x со стороной y_1y_2 треугольников $y_1y_2z_1$, $y_1y_2z_2$, пересекает две другие стороны этих треугольников (по аксиоме Паша) в точках u_1, u_2, расположенных на лучах $\Lambda(x, u)$, $\Lambda_{\text{п}}(x, u)$. Следовательно, $u \in L(x)$. (Заметим, что это и все остальные предложения настоящего параграфа справедливы для пространств абсолютной геометрии; поэтому предлагаемый метод применим к выпуклым множествам в пространствах более общей природы, чем линейные.)

$\Gamma(x)$ будем называть гранью множества M, $L(x)$ — соответствующим линейным многообразием.

Следующие утверждения равносильны:

1. $x \leqslant y$. 2. $x \in \Gamma(y)$. 3. $\Gamma(x) \subset \Gamma(y)$. 4. $L(x) \subset L(y)$.

Отсюда следует, что соотношение M-предшествования рефлексивно и транзитивно. Множество $(*)$-граничных точек $\Gamma(x)$ относительно $L(x)$ совпадает с $\underset{z}{M}[z < x]$ (точка z выпуклого множества Γ является $(*)$-граничной относительно линейного многообразия L, если существует луч $Л(z, y) \subset L$, не содержащий точек Γ).

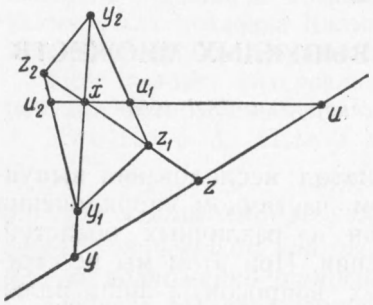


Рис. 1

$\Gamma(x)$ назовем минимальной гранью, если не существует $z < x$.

$\Gamma(x)$ тогда и только тогда является минимальной гранью, когда $\Gamma(x) = L(x)$.

В качестве первого приложения укажем, что выпуклые множества можно классифицировать по структурам следования их элементов (эквивалентные элементы отождествляются).

§ 2. О параметрическом представлении выпуклых множеств. Если выпуклое $(*)$-замкнутое множество M содержит луч $Л(x, x + y)$ (прямую $П(x, x + z)$) и точку x', то M содержит и луч $Л(x', x' + y)$ (прямую $П(x', x' + z)$). Поэтому множества

$$K(M) \equiv \underset{y}{E}[Л(x, x + y) \subset M], \quad \varepsilon(M) \equiv \underset{z}{E}[П(x, x + z) \subset M]$$

не зависят от выбора $x \in M$. $K(M)$ назовем предельным конусом множества M (ср. (2), стр. 30), $\varepsilon(M)$ — его предельным линейным многообразием.

Теорема 1. *Если выпуклое $(*)$-замкнутое множество не содержит бесконечных строго убывающих последовательностей элементов $x_1 > x_2 > \ldots$, то все точки $u \in M$ и только они представимы в виде*:

$$u = \sum_{\alpha} \theta_\alpha x_\alpha + \sum_{\beta} d_\beta y_\beta + \sum_{\gamma} c_\gamma z_\gamma,$$

где $\{x_\alpha\}$ — точки, выбранные по одной на каждой минимальной грани множества M; $\{y_\beta\}$ — точки, выбранные по одной на каждой грани множества $K(M)$, непосредственно следующей за его минимальной гранью; $\{z_\gamma\}$ — база Хамеля множества $\varepsilon(M)$; $\{\theta_\alpha\}$, $\{d_\beta\}$, $\{c_\gamma\}$ — множества вещественных чисел, в каждом из которых лишь конечное число отлично от нуля, причем $\theta_\alpha \geqslant 0$, $\sum_\alpha \theta_\alpha = 1$, $d_\beta \geqslant 0$ (ср. (2) стр. 35).

Замечание. Если существует гиперплоскость $H \ni 0$, пересекающая все лучи $Л(0, y) \subset K(M) \setminus \varepsilon(M)$, то множество $\{y_\beta\}$ можно составить из точек, выбранных по одной на каждой минимальной грани множества $H \cap K(M)$.

Из теоремы 1 легко получить параметрическое представление решений конечной системы линейных неравенств — основной результат работы (3).

§ 3. Системы линейных неравенств. Пусть E — линейное множество; E^* — некоторое линейное множество аддитивных и одно-

родных функционалов, определенных на E; $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset E^*$; $\{a_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — множество вещественных чисел. Рассмотрим вопрос о существовании $x\in E$, удовлетворяющего системе неравенств

$$f_\alpha(x)\leqslant a_\alpha \quad (\alpha\in A), \tag{1}$$

т. е. вопрос о совместности системы линейных неравенств.

Выпуклое множество $M\subset E$ ($N\subset E^*$) назовем E^*-замкнутым (E-замкнутым), если для каждого $x_0\in M$ ($f_0\in N$) существует $f\in E^*$ ($x\in E$) такой, что $f(x_0)<\inf\limits_{x\in M} f(x)$ ($f_0(x)<\inf\limits_{f\in N} f(x)$).

Если E', E'' — линейные множества, то под $E'\times E''$ понимают линейное множество пар (x, y), где $x\in E'$, $y\in E''$ ($\lambda(x, y)+\mu(x', y')=(\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y')$). Множество всех вещественных чисел обозначим через J.

Теорема 2. *Для совместности системы линейных неравенств* (1) *необходимо и достаточно, чтобы* $E\times J$ *— замкнутая* коническая оболочка множества* $\{(f_\alpha, a_\alpha)\}_{\alpha\in A}\subset E^*\times J$ *с вершиной в* $(0, 0)$ *не содержала луча* $Л((0, 0), (0, -1))$.

Если система (1) не имеет решения, то можно говорить лишь о наилучшем в каком-либо смысле приближенном решении. При отыскании наилучшего в смысле Чебышева приближенного решения несовместной системы линейных неравенств (1) возникает вопрос о величине

$$\mathscr{L}=\inf_{x\in E}\sup_{\alpha\in A}(f_\alpha(x)-a_\alpha).$$

Ответ на этот вопрос дает

Теорема 3. $\mathscr{L}$ *равно верхней грани тех* λ, *для которых* $E\times J$ *— замкнутая коническая оболочка множества* $\{(f_\alpha, a_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ *с вершиной* $(0, -\lambda)$ *пересекается с лучом* $Л((0, -\lambda), (0, -\lambda-1))$ (*ср.* [4], *стр.* 15—19).

Класс E^* — замкнутых выпуклых множеств $M\subset E$ можно охарактеризовать как совокупность решений всевозможных систем линейных неравенств. Определим один более узкий класс множеств.

Выпуклое $(*)$-замкнутое множество $M\subset E$ назовем многогранником относительно E^*, если для каждого непересекающегося с M луча $Л(x, y)$ с вершиной $x\in M$ найдется функционал $f\in E^*$ такой, что $f(z)<f(u)$ для всех $z\in Л(x, y)$, $u\in M$.

Теорема 4. *Выпуклое* $(*)$*-замкнутое множество* $M\subset E$ *тогда и только тогда является многогранником относительно* E^*, *когда для каждого* $x_0\in M$ $L(x_0)$ *совпадает с пересечением гиперплоскостей, проходящих через* x_0 *и отделяющих* M:

$$L(x_0)=\bigcap_{f\in F^x} E[f(x)=f(x_0)], \quad F=\underset{f}{E^*}[f(x_0)\leqslant f(x), \ x\in M].$$

Отметим, что совокупность решений конечной системы линейных неравенств всегда являются многогранником относительно соответствующего пространства. Поэтому, если M — совокупность решений конечной системы линейных неравенств (1), то для каждого $x\in M$ $L(x)$ есть совокупность решений некоторой системы линейных уравнений

$$f_\alpha(x)=a_\alpha \quad (\alpha\in A_1\subset A).$$

---

* Если $(f, a)\in E^*\times J$, $(x, b)\in E\times J$, то $(f, a)(x, b)=f(x)+ab$.

Пользуясь этим, можно находить точки минимальных граней, так как минимальная грань $\Gamma(x)$ совпадает с $L(x)$.

§ 4. О положительном функционале. Пусть $K \subset E$ — конус с вершиной в 0; $K^* \subset E^*$ — конус положительных функционалов: $K^* = E^*[f(x) \geqslant 0,\ x \in K]$.

Теорема 5. *Для существования функционала $f_0 \in K^*$, положительного на каждом $x \in K$, на котором принимает положительное значение хотя бы один функционал $f \in K^*$, достаточно наличия в K^* грани $\Gamma(f)$, E-плотной в K^*. (В частности, достаточно наличия грани $\Gamma(f) = K^*$, что всегда имеет место в случае конечномерности K^*.)* (*Ср.* ([5]), *стр.* 16.)

§ 5. К проблеме А. Хаара. Пусть C — пространство непрерывных вещественных функций, определенных на компакте Q, $L \subset C$ — n-мерное подпространство. Для каждого $x \in C$ расстояние до L (по равномерной метрике) достигается на точках некоторого выпуклого множества — многогранника наилучших приближений.

Нас интересует вопрос о размерности таких многогранников. Следующая теорема обобщает известный результат А. Хаара (см. ([6]), стр. 78).

Теорема 6. *Многогранник наилучших приближений для каждой функции $x \in C$ является не более чем k-мерным тогда и только тогда, когда каждые $k+1$ линейно независимых функций из L имеют в Q не более $n-k-1$ общих корней.*

При помощи этой теоремы для каждого конечномерного подпространства $L \subset C$ можно определить число r, равное максимуму размерностей многогранников наилучших приближений. Это число будем называть чебышевским рангом подпространства L. Подпространство, удовлетворяющее классическому условию Хаара, имеет, очевидно, нулевой чебышевский ранг.

Понятие чебышевского ранга оказывается весьма полезным при исследовании наилучших приближений непрерывных функций нескольких переменных многочленами.

Пример. Из теоремы 6 легко получить следующий геометрический факт*:

Для каждой непрерывной поверхности $z = f(x, y)$, определенной на замкнутом ограниченном множестве Q точек (x, y), все плоскости $z = ax + by + c$, приближающие данную поверхность наилучшим образом $(\max\limits_{(x,y)\in Q} |f(x, y) - (ax + by + c)| = \min)$, *пересекаются по одной прямой.*

Поступило
23 VIII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Ш. Рубинштейн, ДАН, **78**, 213 (1951). [2] А. Д. Александров, Выпуклые многогранники, 1950. [3] Г. Ш. Рубинштейн, Усп. матем. наук, **9**, в. 2 (60) (1954). [4] Е. Я. Ремез, Укр. матем. журн., **5**, 1 (1953). [5] М. Г. Крейн, М. А. Рутман, Усп. матем. наук, **3**, в. 1 (23) (1948). [6] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, 1947. [7] И. М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, 1948, стр. 8, 10.

* Указано нам проф. М. Г. Крейном.