Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 3

МАТЕМАТИКА

О. КИШ

О СХОДИМОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 29 I 1955)

Пусть дана бесконечная треугольная матрица X, состоящая из вещественных чисел $x_k^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots; k = 1, 2, \ldots, 2n-1)$, $0 \leqslant x_k^{(n)} < 2\pi$. Обозначим через $n[a, b)$ число элементов n-й строки матрицы X, лежащей на отрезке $a \leqslant x < b$ $(0 \leqslant a < b \leqslant 2\pi)$. Если существует $\lim\limits_{\substack{a \to x-0 \\ b \to x+0}} \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n[a, b)}{(2n+1)(b-a)} = \rho(x)$, то $\rho(x)$ называется предельной плотностью чисел $x_k^{(n)}$ в точке x.

Пусть $f(x)$ есть 2π-периодическая вещественная или комплексная функция вещественной переменной x. Выполним тригонометрическое интерполирование ее по узлам $x_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n+1)$. Мы не считаем, что узлы $x_k^{(n)}$ должны быть различными, и если среди них будут одинаковые, то мы будем иметь в виду так называемое интерполирование с кратными узлами.

Теорема 1. *Для того чтобы тригонометрический интерполяционный процесс сходился при всех x для любой 2π-периодической и аналитической на вещественной оси функции f, необходимо и достаточно, чтобы при всяких x $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ предельная плотность $\rho(x)$ существовала и была величиной постоянной, равной $1/2\pi$. Если это условие выполняется, то сходимость интерполирования будет равномерной на всей оси.*

Эта теорема является следствием высказываемого ниже результата из теории интерполирования гармонических функций гармоническими многочленами. Пусть в круге $|z| \leqslant 1$ определена комплексная функция $f(z)$. Возьмем на окружности $|z| = 1$ точки $\exp ix_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n+1)$ и построим гармонический многочлен

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \operatorname{Re} z^k + b_k \operatorname{Im} z^k), \tag{1}$$

интерполирующий $f(z)$ по узлам $\exp ix_k^{(n)}$. Если среди $x_k^{(n)}$ будут совпадающие, то мы будем, как и выше, рассматривать интерполирование с кратными узлами.

Теорема 2. *Последовательность f_n сходится в круге $|z| \leqslant 1$ к f для всякой аналитической в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ функции f в том и только в том случае, когда предельная плотность чисел $x_k^{(n)}$ существует при всяких $0 \leqslant x < 2\pi$ и равна постоянной $1/2\pi$. Если это условие выполняется, то сходимость будет равномерной при $|z| \leqslant 1$.*

Укажем путь для доказательства теоремы. Можно показать, что остаток интерполирования $f(z) - f_n(t)$ для всякой функции f, аналитической в круге $|z| \leqslant r$ $(r > 1)$, может быть представлен при $|z| = 1$ в следующей форме:

$$f(z) - f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} f(t) \frac{\Omega(z)}{\Omega(t)} \frac{t^n}{z^n} \frac{dt}{t-z}, \qquad \Omega(z) = \prod_{k=1}^{2n+1} (z - \exp ix_k^{(n)}). \tag{2}$$

Параллельно задаче интерполирования f гармоническим многочле-

ном f_n рассмотрим интерполирование f алгебраическим многочленом комплексной переменной z. Возьмем на единичной окружности систему точек $\exp ix_k^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots; k = 1, 2, \ldots, n)$ и выполним алгебраическое эрмитовское интерполирование f по узлам $\exp ix_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Остаток его равен

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r} f(t)\frac{\omega(z)}{\omega(t)}\frac{dt}{t-z}, \qquad \omega(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - \exp ix_k^{(n)}). \tag{3}$$

Интеграл (2) по своему строению аналогичен интегралу (3). Эта аналогия позволила доказать теорему 2 путем, вполне сходным с тем, каким была доказана Калмаром (1) соответствующая теорема для интерполирования f алгебраическим многочленом от z.

При помощи интегрального представления (2) остатка интерполирования f гармоническим многочленом легко может быть доказана

Теорема 3. *Если f регулярна в замкнутом круге*

$$|z| \leqslant 3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2, \tag{4}$$

то при любом выборе узлов $\exp ix_k^{(n)}$ *остаток* (2) *интерполирования ее гармоническими многочленами* (1) *будет стремиться к нулю при* $n \to \infty$ *равномерно относительно* z *в круге* $|z| \leqslant 1$.

Область (4), регулярность в которой гарантирует сходимость интерполирования при любых узлах $\exp ix_k^{(n)}$, является наименьшей, так как может быть построена такая функция f, регулярная при $|z| < 3 + 2\sqrt{2}$ и имеющая только одну особую точку на окружности $|z| = 3 + 2\sqrt{2}$, и взята такая матрица узлов, для которых интерполяционный процесс не сходится в некоторой точке окружности $|z| = 3 + 2\sqrt{2}$.

Отметим, что соответствующая теорема из теории интерполирования аналитических функций алгебраическими многочленами по любым узлам, лежащим на окружности $|z| = 1$, гарантирует сходимость интерполирования, если f будет регулярной в круге $|z| \leqslant 3$ *, который значительно меньше круга (4).

Для тригонометрического интерполирования из теоремы 3 вытекает

Теорема 4. *При любом выборе узлов* $x_k^{(n)} \in [0, 2\pi]$ *тригонометрический интерполяционный процесс равномерно сходится на вещественной оси для всякой функции,* 2π*-периодической и аналитической в полосе*

$$|\operatorname{Im} z| \leqslant 2 \ln (1 + \sqrt{2}). \tag{5}$$

Полоса (5) не может быть уменьшена, так как, если взять любую точку t с $|\operatorname{Im} t| \leqslant 2 \ln (1 + \sqrt{2})$, то можно построить такую 2π-периодическую функцию, которая будет аналитической на всей плоскости за исключением точек $t + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, и такую матрицу узлов $x_k^{(n)}$, что интерполирование не будет сходиться к f при некоторых x.

Отметим, что соответствующая теорема из теории интерполирования аналитических функций алгебраическими многочленами по любым узлам, лежащим на отрезке $[0, 2\pi]$, гарантирует сходимость интерполирования при $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, если функция f регулярна в замкнутых кругах $|z| \leqslant 2\pi$ и $|z - 2\pi| \leqslant 2\pi$ (2).

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
31 XII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Kalmár, Mathematikai e's physikai lapok, **33**, 120 (1926). [3] В. И. Крылов, ДАН, **78**, № 5, 857 (1951).

* Эта область регулярности также является наименьшей, если требовать сходимости для всех f.