Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 1

ФИЗИКА

Ю. В. НОВОЖИЛОВ

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ С ПРИЧИННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ И ШВИНГЕРОВСКИЙ ФУНКЦИОНАЛ

(Представлено академиком В. А. Фоком 6 IV 1955)

В предыдущих статьях автора (1) было введено понятие о причинных операторах и исследованы некоторые их свойства. Одновременно операторы, обладающие теми же свойствами, что и причинные операторы, были введены Кёстером (2) при гиперквантовании фейнмановских амплитуд и Гольфандом (3), который развил аппарат «квазиполей». В работе (1) были также предложены уравнения для вектора состояния. Однако вид этих уравнений был определен из требования, чтобы результаты теории с причинными операторами совпадали с результатами обычной теории, что не может являться исходным пунктом для последовательного построения теории.

В настоящей работе в качестве исходного положения теории с причинными операторами принимается принцип действия. В работе выводятся уравнения для вектора состояния и матричных элементов операторов поля и устанавливается соответствие вектора состояния со швингеровским вакуумным функционалом от внешних источников. Для определенности рассматривается случай нуклонов, взаимодействующих с псевдоскалярным мезонным полем. Обозначения те же, что и в работе (1)*.

1. Важнейшей особенностью причинных операторов $\chi(x)$, $\bar{\chi}(y)$ (нуклонное поле) и $\Phi(z)$ (мезонное поле) является то, что они коммутируют или антикоммутируют независимо от характера интервала между точками x, y и z:

$$\{\chi(x), \bar{\chi}(y)\} = 0, \quad [\Phi(x), \Phi(y)] = 0, \quad [\chi(x), \Phi(y)] = 0. \tag{1}$$

Поэтому в теории с причинными операторами при помощи операторов χ, $\bar{\chi}$ и Φ можно построить полную систему взаимо-коммутирующих операторов ξ и определить состояние, характеризуемое собственными значениями ξ', на произвольной гиперповерхности или в произвольном четырехмерном объеме**. В этом положении заключается основное отличие теории с причинными операторами от обычной теории. С этой точки зрения развиваемую теорию можно рассматривать как пространственно-временную («четырехмерную») трактовку квантовой теории поля.

Базисные векторы мы будем считать заданными при помощи собственных значений ξ' полной системы взаимо-коммутирующих операторов ξ

---

* Отметим опечатки и неточности в первой работе (1): на стр. 535 индексы $^{(+)}$ и $^{(-)}$ напечатаны как $^{c+1}$ и $^{c-1}$. В формуле (4) вместо $\bar{\psi}^T$ должно быть $(R\bar{\psi}R^{-1})^T$.

** Это положение следует рассматривать в качестве основного предположения, если не считать заранее известной перестановочность причинных операторов (1).

во всем четырехмерном объеме. Уравнения для вектора состояния Ω получаются из принципа действия. Рассмотрим бесконечно малое изменение $\delta\Omega$, вызванное бесконечно малыми изменениями операторов ξ внутри четырехмерного объема. Принцип действия может быть выражен равенством

$$\delta\Omega = i\,\delta W\cdot\Omega, \tag{2}$$

где W — оператор действия. Из принципа действия (2) при неизменном четырехмерном объеме следуют интересующие нас уравнения для Ω. Принцип стационарного действия здесь не имеет места, так как базисные векторы предполагаются заданными во всем четырехмерном объеме. Это значит, что не существует уравнений для операторов $\chi(x)$, $\bar{\chi}(x)$ и $\Phi(x)$.

Выражение для действия удобно представить в виде

$$W = \int L(x, y)\, d^4x\, d^4y, \tag{3}$$

$$L(x, y) = -\frac{1}{2}\delta^4(x-y)\Big\{\bar{\chi}(y)\Big[\gamma_\lambda\frac{\partial}{\partial x_\lambda} + m\Big]\chi(x) + \chi(y)\Big[\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\bar{\chi}(x)\,\gamma_\lambda - m\bar{\chi}(x)\Big] -$$

$$-\frac{1}{2}\,ie\Phi(x)\,[\bar{\chi}(y)\,\gamma_5\chi(x) - \gamma_5\chi(y)\,\bar{\chi}(x)]\Big\} - \delta^4(x-y)\left[\left(\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_\nu}\right)^2 + \mu^2\Phi^2(x)\right],$$

что позволяет избежать неоднозначностей, которые возникают при рассмотрении произведений причинных операторов, относящихся к одному времени ([1]).

2. Рассмотрим сначала вектор состояния Ω в представлении, где в качестве операторов ξ выбираются операторы рождения $a^+(x)$, $b^+(x)$ (нуклонное поле) и $c^+(x)$ (мезонное поле). Перестановочные соотношения этих операторов с операторами поглощения $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ имеют вид

$$\{a(x),\, a^+(y)\} = \delta^4(x-y), \quad \{b(x),\, b^+(y)\} = \delta^4(x-y), \tag{4}$$
$$[c(x),\, c^+(y)] = \delta^4(x-y),$$

отличающийся от обычного наличием в правой части четырехмерной δ-функции вместо трехмерной. В таком представлении Ω — это обобщенный функционал Фока ([4])

$$\Omega = \sum_{n,\,m,\,k}(n!\;m!\;k!)^{-1/2}\int d^4x_1\ldots d^4x_n\, d^4y_1\ldots d^4y_m\, d^4z_1\ldots d^4z_k\times$$
$$\times f(x_1\ldots x_n\,|\,y_1\ldots y_m\,|\,z_1\ldots z_k)\,a^+(x_1)\ldots a^+(x_n)\,b^+(y_1)\ldots$$
$$\ldots b^+(y_m)\,c^+(z_1)\ldots c^+(z_k)\,\Omega_{\text{вак}}, \tag{5}$$

где $\Omega_{\text{вак}}$ — функционал вакуума. Вектор состояния в виде (5) был введен в работе ([2]).

Вариация функционала Ω, связанная с вариацией операторов a^+, b^+, c^+, имеет вид

$$\delta\Omega = \int[\delta a^+(x)\,a(x) + \delta b^+(x)\,b(x) + \delta c^+(x)\,c(x)]\,d^4x\Omega \equiv P\Omega. \tag{6}$$

Так как скалярное произведение функционалов не изменяется при вариациях операторов поля, то $P^+ = -P$ и $\delta F = [P, F]$, где F — некоторый оператор, составленный из операторов поля.

Соответствие операторов рождения и поглощения с причинными операторами, необходимое для вычисления вариации действия, устанавливается при помощи предположения, что операторы χ, $\bar{\chi}$ и Φ можно под-

разделить на рождающие (χ^c, $\bar{\chi}^c$, Φ^c) и поглощающие (χ^a, $\bar{\chi}^a$, Φ^a) части, причем все рождающие и все поглощающие части в отдельности коммутируют или антикоммутируют. Тогда выражение операторов χ, $\bar{\chi}$, Φ через рождающие и поглощающие должно удовлетворять условию, чтобы перестановочные соотношения между рождающими и поглощающими частями содержало в правой стороне функции Грина фейнмановского типа ([1]). В согласии с этим требованием, можно положить, например ([2]):

$$\chi(x) = a(x) - \int \sigma_F(x, y)\, b^+(y)\, d^4y, \quad \bar{\chi}(x) = b(x) + \int a^+(y)\, \sigma_F(y, x)\, d^4y,$$
$$\Phi(x) = c(x) + \int d_F(x, y)\, c^+(y)\, d^4y, \tag{7}$$

где σ_F и d_F — некоторые функции Грина фейнмановского типа.

При выборе операторов поля в виде (7) уравнение (2) равносильно уравнению

$$P^+\Omega = i[P^+, W]\Omega. \tag{8}$$

Уравнение (8) определяет возможный вектор состояния. Оно эквивалентно системе уравнений, предложенной Кёстером ([2]):

$$\left\{i\left(\gamma_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} + m\right) - g\gamma_5\Phi(x)\right\}\chi(x)\Omega = -b^+(x)\Omega,$$
$$\left\{i\left(\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\bar{\chi}(x)\gamma_\lambda - m\bar{\chi}(x)\right) + g\bar{\chi}(x)\gamma_5\Phi(x)\right\}\Omega = -a^+(x)\Omega, \tag{9}$$
$$\{i(\Box - \mu^2)\Phi(x) - gN[\bar{\chi}(x)\gamma_5\chi(x)]\}\Omega = -c^+(x)\Omega.$$

Уравнение для матричного элемента некоторого оператора F можно получить, рассмотрев матричный элемент вариации $(\Omega_0, \delta F\Omega)$ (предполагая, что Ω определяется уравнениями (2)). Мы имеем (так как $\delta\Omega = 0$):

$$(\Omega_0, \delta F\Omega) = -i(\Omega_0, F\delta W\Omega). \tag{10}$$

В случае, когда $F = \chi(x_1)\ldots\chi(x_n)\bar{\chi}(y_1)\ldots\bar{\chi}(y_m)\Phi(z_1)\ldots\Phi(z_k)$, из уравнения (10) вытекают уравнения для $T(x_1\ldots x_n|y_1\ldots y_m|z_1\ldots z_k)$ ([3,5]).

Из уравнений (9) следует бесконечная система «зацепляющихся» уравнений для функций $f(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$, которая более громоздка, чем система уравнений для функций $T(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$. Однако функции $f(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$ имеют по сравнению с функциями $T(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$ бесспорное преимущество в том, что первые относятся к ортогональным состояниям.

3. Вектор энергии — импульса P_μ ($P_4 = iP_0$) мы определим как величину, обладающую свойствами оператора смещения (вектор P_μ не может быть получен из функции Лагранжа (3), так как в рассматриваемой здесь «четырехмерной» трактовке теории поля нет вариационного принципа)

$$-i[P_\mu, a(x)] = \frac{\partial a(x)}{\partial x_\mu}; \quad -i[P_\mu, a^+(x)] = \frac{\partial a^+(x)}{\partial x_m} \text{ и т. д.,} \tag{11}$$

со взаимо-коммутирующими составляющими $[P_\mu, P_\nu] = 0$, причем должно быть $P_\mu\Omega_0 = 0$. Этим условиям удовлетворяет

$$P_\mu = -i\int\left[a^+(x)\frac{\partial a(x)}{\partial x_\mu} + b^+(x)\frac{\partial b(x)}{\partial x_\mu} + c^+(x)\frac{\partial c(x)}{\partial x_\mu}\right]d^4x. \tag{12}$$

Применение оператора P_μ к вектору состояния Ω равносильно дифференцированию амплитуд $f(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$: если $P_\mu\Omega = \Omega'$ и $f'(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$ — аплитуды в Ω', то

$$f'(x\ldots|y\ldots|z\ldots) = -i\left\{\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\ldots+\frac{\partial}{\partial y_\mu}+\ldots+\frac{\partial}{\partial z_\mu}+\ldots\right\}\times \\ \times f(x\ldots|y\ldots|z\ldots). \qquad (13)$$

Закон сохранения энергии — импульса был использован при выводе (13).

4. Рассмотрим теперь вектор состояния Ω в представлении, где в качестве операторов ξ выбраны причинные операторы $\chi, \bar{\chi}, \Phi$. В этом случае для получения уравнений не нужно предполагать возможность подразделения причинных операторов на рождающие и поглощающие части. Введем операторы $\pi, \bar{\pi}, \Pi$, которые определим при помощи перестановочных соотношений:

$$\{\pi(x), \chi(y)\} = -\{\bar{\pi}(x), \bar{\chi}(y)\} = [\Pi(x), \Phi(y)] = -i\delta^4(x-y). \qquad (14)$$

Вариация функционала Ω, вызванная вариацией операторов поля, тогда имеет вид:

$$\delta\Omega = i\int[\pi(x)\,\delta\chi(x) + \delta\bar{\chi}(x)\,\bar{\pi}(x) + \delta\Phi(x)\,\Pi(x)]\,d^4x\Omega. \qquad (15)$$

Основное уравнение для вектора состояния (2) здесь приобретает вид $(x\to y)$:

$$\left\{i\left(\gamma_\lambda\frac{\partial}{\partial x_\lambda}+m\right)-g\gamma_5\Phi(x)\right\}\chi(x)\,\Omega = -i\bar{\pi}(x)\,\Omega,$$
$$\left\{i\left(\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\bar{\chi}(x)\,\gamma_\lambda - m\bar{\chi}(x)\right)+g\bar{\chi}(x)\,\Phi(x)\,\gamma_5\right\}\Omega = -i\pi(x)\,\Omega, \qquad (16)$$
$$\{i(\Box-\mu^2)\,\Phi(x) + g[\bar{\chi}(y)\,\gamma_5\chi(x) - \gamma_5\chi(y)\,\bar{\chi}(x)]\}\,\Omega = i\Pi(x)\,\Omega.$$

Уравнения (16) представляют собой не что иное, как уравнения, определяющие швингеровский вакуумный функционал Z от внешних источников $\eta, \bar{\eta}$ и J ([6,7]). Таким образом, вектору состояния Ω в теории с причинными операторами может быть сопоставлено в Z среднее нормированное значение S-матрицы, зависящей от внешних источников; внешние же источники $\eta, \bar{\eta}, J$, введенные Швингером в качестве вспомогательных величин, в теории с причинными операторами сопоставляются операторам $\pi, \bar{\pi}, \Pi$, рассматриваемым как операторы умножения. Заметим, что оператор действия (3) не зависит от внешних источников. Полученные результаты явились следствием предположения о том, что состояние поля может быть задано в «четырехмерном» смысле.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
3 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. В. Новожилов, ДАН, 99, №№ 4 и 5 (1954). [2] F. Coester, Phys. Rev., 95, No. 5 (1954). [3] Ю. А. Гольфанд, ЖЭТФ, 28, 140 (1955). [4] В. А. Фок, Phys. Zs. d. Sowietunion, 6, 425 (1934). [5] P. Matthews, A. Salam, Proc. Roy. Soc., A 221, 128 (1954). [6] Е. С. Фрадкин, ДАН, 98, № 1 (1954). [7] Н. П. Клепиков, ДАН, 98, № 6 (1954).