Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 1

ФИЗИКА

Ю. Л. КЛИМОНТОВИЧ

О ДИАМАГНЕТИЗМЕ СВЕРХПРОВОДНИКОВ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 11 III 1955)

Многие экспериментальные данные говорят о глубокой аналогии между токами в сверхпроводниках и диамагнитными токами ([1]). Теоретически впервые эта аналогия была прослежена Лондоном ([1, 2]). Основная ценность указанной работы состоит в том, что в ней задача о выводе основного уравнения феноменологической теории сверхпроводимости (уравнения Лондона) формулируется на основе квантовой теории и сводится в основном к выяснению условий, при которых волновая функция системы является «жесткой», т. е. слабо меняется при включении внешнего магнитного поля ([1]). Однако при этом остается неясным, почему магнитное поле не проникает внутрь сверхпроводящего образца, какой процесс в сверхпроводнике препятствует проникновению поля. Поэтому рассмотрение Лондона не дает возможности понять, с чем связано существование критического магнитного поля, при котором сверхпроводимость разрушается. Кроме того остается совершенно неясной роль типа статистики, которой подчиняются частицы в сверхпроводнике. Выяснению последнего вопроса и посвящена настоящая статья. В ней показано, что для системы заряженных частиц с учетом лишь магнитного взаимодействия уравнение Лондона имеет место лишь в том случае, если частицы образуют бозевскую систему. В случае же классической статистики и для фермиевских систем уравнение Лондона не имеет места и, следовательно, магнитное поле проникает вглубь системы.

Рассмотрим систему $2N$ взаимодействующих электронов и ионов. Полный электрический заряд рассматриваемой системы равен нулю. Роль ионов сводится к созданию положительно заряженного фона.

Функция Гамильтона рассматриваемой системы при учете лишь магнитного взаимодействия может быть представлена в следующем виде:

$$\mathcal{H} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} \frac{1}{2m}\left(\mathbf{P}_i - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{q}_i)\right)^2 + \frac{1}{8\pi}\int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)\, dv,$$
$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad e < 0. \tag{1}$$

Кулоновское взаимодействие между электронами не рассматривается, поскольку оно экранируется в металлах на расстоянии порядка 10^{-8} см и поэтому не играет существенной роли в вопросе об экранировании магнитного поля.

Следуя работе ([3]), обозначим через $N_{\mathbf{qP}}d\mathbf{q}\,d\mathbf{P}$ число частиц около точки $\mathbf{q}$ в интервале $d\mathbf{q}$ с импульсом $\mathbf{P}$ в интервале $d\mathbf{P}$. Тогда функция Гамильтона (1) может быть представлена в виде

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\int\left[\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right]^2 N_{\mathbf{q},\mathbf{P}}\cdot d\mathbf{q}\,d\mathbf{P} + \frac{1}{8\pi}\int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)\, dv. \tag{2}$$

В эквивалентности выражений (1) и (2) можно убедиться, если положить

$$N_{\mathbf{q},\mathbf{P}} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_i)\,\delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}_i). \tag{3}$$

В выражении (2) величины $N_{\mathbf{q},\mathbf{P}}$ и $\mathbf{A}$ являются динамическими переменными.

Система уравнений для определения $N_{\mathbf{q},\mathbf{P}}$ и $\mathbf{A}$, соответствующая функции Гамильтона (2), имеет вид

$$\frac{\partial N_{\mathbf{q},\mathbf{P}}}{\partial t} + \frac{1}{m}\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\frac{\partial N_{\mathbf{q},\mathbf{P}}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{1}{2m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 \frac{\partial N_{\mathbf{q},\mathbf{P}}}{\partial \mathbf{P}} = 0; \tag{4}$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi e}{mc}\int\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) N_{\mathbf{q},\mathbf{P}}\, d\mathbf{P}, \quad \operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \tag{5}$$

Соответствующие квантовые уравнения могут быть получены аналогично тому, как это сделано в работе автора ([3]), и имеют вид:

$$\frac{\partial N_{\mathbf{q},\mathbf{P}}}{\partial t} = \frac{i}{h}\int\cdots\int\frac{1}{2m}\left(\vec{\eta} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)^2 [N(\mathbf{r} + {}^1\!/_2 h\vec{\tau},\ \vec{\eta} - {}^1\!/_2 h\vec{\theta}) -$$

$$- N(\mathbf{r} - {}^1\!/_2 h\vec{\tau},\ \vec{\eta} + {}^1\!/_2 h\vec{\theta})] \exp[i\vec{\tau}(\vec{\eta} - \mathbf{P}) + i\vec{\theta}(\mathbf{r} - \mathbf{q})]\, d\vec{\tau}\, d\vec{\eta}\, d\mathbf{r}\, d\vec{\theta}, \tag{6}$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi e}{mc}\int\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) N_{\mathbf{q},\mathbf{P}}\, d\mathbf{P}; \quad \operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \tag{7}$$

В рассматриваемом нами случае считаем $\mathbf{A}$ числом, а не оператором. При этом выпадают из рассмотрения некоторые чисто квантовые эффекты.

Решение системы уравнений (4), (5) дает лишь динамическое описание поведения системы, а решение уравнений (6), (7) соответствует квантово-механическому описанию. Для статистического описания, помимо решения уравнения (3), необходимо еще знать функцию распределения $F(N_{\mathbf{q},\mathbf{P}}, \mathbf{A})$ динамических переменных $N_{\mathbf{q},\mathbf{P}}$ и $\mathbf{A}$. В этом смысле рассматриваемый метод аналогичен методу вторичного квантования в фазовом пространстве ([3]) (см. также ([4])). Поэтому решения указанных уравнений описывают поведение системы при абсолютном нуле. При этом классическое уравнение (4) применимо лишь в тех случаях, когда квантовые эффекты несущественны (например, при малой концентрации частиц).

Рассмотрим решение системы уравнений (3), (4) в равновесном состоянии ($\partial N_{\mathbf{q},\mathbf{P}} / \partial t = 0$, $\partial \mathbf{A} / \partial t = 0$) и найдем соответствующее уравнение для векторного потенциала.

В случае классической статистики в равновесном состоянии решение уравнения (4) может быть записано в виде

$$N_{\mathbf{q},\mathbf{P}} = C \exp\left[-\frac{1}{2mxT}\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2\right]. \tag{8}$$

Следует, однако, подчеркнуть, что выражение (5) соответствует самосогласованному приближению ([5]), когда $N_{\mathbf{q},\mathbf{P}}$ рассматривается не как динамическая переменная, а как функция распределения. Поэтому этот пример приводится лишь для иллюстрации известной теоремы, согласно которой магнитное поле в классическом случае не меняет состояния системы и поэтому в классической системе не может происходить экранирование магнитного поля.

Действительно, умножим выражение (8) на $\mathbf{P}$ и подставим в уравнение (5) при $\partial \mathbf{A} / \partial t = 0$. Тогда для слабого магнитного поля $\left(\frac{e}{mc}\mathbf{P}\cdot\mathbf{A} \ll \ll xT\right)$ получим

$$\Delta\mathbf{A} = \frac{4\pi e^2}{mc^2}\mathbf{A}\int e^{-\mathbf{P}^2/2m\varkappa T}d\mathbf{P} - \frac{4\pi e^2}{mc^2}\int\frac{\mathbf{P}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{P})}{m\varkappa T}e^{-\mathbf{P}^2/2m\varkappa T}d\mathbf{P} =$$

$$= \frac{A}{\delta^2} - \frac{4\pi e^2}{3m^2c^2\varkappa T}\mathbf{A}C\int \mathbf{P}^2 e^{-\mathbf{P}^2/2m\varkappa T}d\mathbf{P} = 0, \qquad (9)$$

где

$$\delta^2 = \frac{mc^2}{4\pi e^2 n_0}, \quad n_0 = C\int e^{-\mathbf{P}^2/2m\varkappa T}d\mathbf{P}.$$

Таким образом, $\Delta\mathbf{A} = 0$, и, следовательно, магнитное поле не экранируется.

Рассмотрим теперь квантовый случай. Из системы уравнений (6), (7) для слабого магнитного поля получаем следующее уравнение для векторного потенциала:

$$\Delta\mathbf{A} = \frac{A}{\delta^2} - \frac{4\pi e^2}{mc^2}\int\cdots\int(\mathbf{A}_k\cdot\mathbf{P})\frac{[N_0(\mathbf{P} - {}^1/_2\hbar\mathbf{k}) - N_0(\mathbf{P} + {}^1/_2\hbar\mathbf{k})]}{\mathbf{P}\cdot\hbar\mathbf{k}/m}e^{i\mathbf{k}\mathbf{q}}d\mathbf{P}\,d\mathbf{k}, \qquad (10)$$

где $N_0(\mathbf{P})$ — число частиц с данным импульсом $\mathbf{P}$ при однородном распределении по координатам. Для фермиевской системы $N_{0,\mathbf{P}} = 2/(2\pi\hbar)^3$ при $\mathbf{P} \leqslant \mathbf{p}_0$ и $N_{0,\mathbf{P}} = 0$ при $\mathbf{P} > \mathbf{p}_0$; $\mathbf{p}_0$ — граничный импульс. При $\hbar\mathbf{k} \ll \mathbf{p}_0$, т. е. при условии, что неоднородность много больше $\hbar/p_0 \approx$ $\approx 10^{-8}$ см, получим

$$\Delta\mathbf{A} = \frac{A}{\delta^2} + \frac{4\pi e^2}{mc^2}\frac{2}{3}\mathbf{A}(2m)^{3/2}\int\varepsilon^{3/2}\frac{\partial N_{0,\mathbf{P}}}{\partial\varepsilon}d\varepsilon = 0. \qquad (11)$$

Таким образом, и в случае фермиевской системы $\Delta\mathbf{A} = 0$, т. е. поле тока не экранируется и уравнение Лондона не имеет места.

Для бозевской системы $N_{0,\mathbf{P}} = n_0\delta(\mathbf{P})$

$$\Delta\mathbf{A} = \frac{A}{\delta^2} - \frac{1}{\delta^2}\int\frac{(A_k\cdot\hbar\mathbf{k})\,\hbar\mathbf{k}}{\hbar^2k^2}e^{i\mathbf{k}\mathbf{p}}d\mathbf{k}. \qquad (12)$$

Из условия поперечности $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ следует, что $(\mathbf{A}_k\cdot\mathbf{k}) = 0$, и поэтому второй член в правой части уравнения (12) равен нулю и

$$\Delta\mathbf{A} = \frac{A}{\delta^2}, \qquad (13)$$

т. е. векторный потенциал удовлетворяет уравнению Лондона. При отсутствии внешнего магнитного поля или внешнего тока решение уравнения (13) равно нулю. При наличии внешнего поля или тока решение уравнения (13) соответствует экранированию поля на глубине $\delta \approx 10^{-5}$ см.

Приведенный вывод показывает, что уравнение Лондона имеет место лишь для слабого поля. В случае сильного поля и при исследовании сверхпроводимости в тонких пленках используется более общее уравнение новой феноменологической теории сверхпроводимости В. Л. Гинзбурга и Л. Д. Ландау ([7]).

Таким образом, уравнение Лондона имеет место лишь в том случае, если электроны (вернее возбуждения) в сверхпроводнике образуют бозевскую систему. Этот вывод согласуется с результатом Гинзбурга ([1]), который рассматривал поведение идеальных заряженных бозе- и ферми-газов, находящихся в сосуде конечных размеров, в магнитном поле. В работе ([6]) также имеется указание на то, что для газа заряженных бозонов имеет место уравнение Лондона.

Московский авиационный
технологический институт

Поступило
8 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Л. Гинзбург, Усп. физ. наук, 48, в. 1 (1952). [2] F. London, Superfluids, 1, N. Y., 1950. [3] Ю. Л. Климонтович, ДАН, 96, № 1 (1954). [4] M. Schönberg, Nuovo Cimento, 10, No. 4 (1953). [5] А. А. Власов, Уч. зап. МГУ, в. 75 (1945). [6] M. Schafroth, Phys. Rev., 96, No. 4 (1954). [7] В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 20, в. 12 (1950).