Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 3

МАТЕМАТИКА

И. М. ГЛАЗМАН и П. Б. НАЙМАН

О ВЫПУКЛОЙ ОБОЛОЧКЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 27 I 1955)

Настоящая заметка посвящена некоторым вопросам строения совокупности всех спектральных функций дифференциальной системы

$$-y''+q(x)y-\lambda y=0, \quad y'(0)=hy(0) \quad (0\leqslant x<\infty) \tag{1}$$

как выпуклого множества. Решения уравнения (1), удовлетворяющие, начальным условиям $y(0,\lambda)=1$, $y'(0,\lambda)=h$ и $y(0,\lambda)=0$, $y'(0,\lambda)=1$. обозначаются, соответственно, через $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$.

Как известно, дифференциальной системе (1) соответствует некоторое множество V неубывающих функций $\sigma(\lambda)$, порождающих изометрическое отображение всего пространства $L^2(0,\infty)$ на подпространство M_σ пространства $L^2_\sigma(-\infty,\infty)$ по формулам

$$F(\lambda)=\int_0^\infty f(x)\varphi(x,\lambda)\,dx,$$
$$f(x)=\int_{-\infty}^\infty F(\lambda)\varphi(x,\lambda)\,d\sigma(\lambda), \tag{2}$$

где $f\in L^2(0,\infty)$, $F\in M_\sigma$. Функции $\sigma(\lambda)$, образующие множество V, называются спектральными функциями (сп. функция) системы (1). Сп. функция $\sigma(\lambda)$ называется ортогональной (о. сп. функция), если формулы (2) определяют изометрическое отображение $L^2(0,\infty)$ на все $L^2_\sigma(-\infty,\infty)$ (т. е. если $M_\sigma=L^2_\sigma(-\infty,\infty)$). В дальнейшем функции из V нормируются условиями $\sigma(\lambda-0)=\sigma(\lambda)$, $\sigma(0)=0$.

Множество V выпукло, так как из $\sigma\in V$, $\sigma^*\in V$ следует $\mu^*\sigma+\mu\sigma^*\in V$ (здесь и далее $\mu>0$, $\mu^*>0$, $\mu+\mu^*=1$). Множество V замкнуто в смысле сходимости в основном. Действительно, пусть $\sigma_n\in V$, $\sigma_n\to\sigma$, и пусть D есть класс всех финитных дважды непрерывно дифференцируемых функций. Если положить

$$F(\lambda)=\int_0^\infty f(x)\varphi(x,\lambda)\,dx \quad (f\in D),$$

то достаточно установить возможность предельного перехода при $n\to\infty$ в соотношении

$$\int_{-\infty}^\infty |F(\lambda)|^2\,d\sigma_n(\lambda)=\int_0^\infty |f(x)|^2\,dx,$$

а это следует из модифицированной теоремы Хелли (1) на основании оценки

$$\int_b^\infty |F(\lambda)|^2 d\sigma_n(\lambda) = \int_b^\infty \frac{1}{|\lambda|^2} |\lambda F(\lambda)|^2 d\sigma_n(\lambda) < \frac{1}{b^2} \int_{-\infty}^\infty |\lambda F(\lambda)|^2 d\sigma_n(\lambda) =$$

$$= \frac{1}{b^2} \int_0^\infty |f''(x) - q(x) f(x)|^2 dx$$

и аналогичной оценки для полуоси $(-\infty, a)$.

Введем класс N всех функций $\tau(z)$ комплексного переменного z, регулярных и верхней полуплоскости и имеющих там неотрицательную мнимую часть. Вместе с N введем еще класс N_0 всех тех функций из N, которые удовлетворяют предельному соотношению $\lim \eta^{-1} f(i\eta) = 0$ при $\eta \to \infty$, $\eta > 0$.

Между множествами N и V существует взаимно-однозначное соответствие, определяемое формулой М. Г. Крейна (2)

$$\frac{P_0(z)\tau(z) + P_1(z)}{Q_0(z)\tau(z) + Q_1(z)} = \int_{-\infty}^\infty \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z}, \tag{3}$$

где P_0, P_1, Q_0, Q_1 — некоторые целые функции от z, однозначно определяемые системой (1). Как показал М. Г. Крейн, функция $\sigma(\lambda) = \sigma_\tau(\lambda)$ будет о. сп. функцией в том и только в том случае, когда соответствующая ей функция $\tau(z)$ вырождается в вещественную константу. Для дальнейшего существенно, что функция

$$u(z) = \frac{Q_0(z)}{Q_1(z)}$$

принадлежит классу N (3).

Заметим, что о. сп. функции являются экстремальными точками множества V. Действительно, согласно (3) значения $w(z)$ при фиксированном z и произвольной $\sigma \in V$ заполняют некоторый круг K плоскости w, и если $\sigma(\lambda)$ есть о. сп. функция, то соответствующая точка w_σ попадает на границу K, так что из $w_\sigma = \mu^* w + \mu w^*$, $w \in K$, $w^* \in K$ следует $w = w^* = w_\sigma$.

Замкнутой выпуклой оболочкой U о. сп. функций назовем замыкание множества U' функций $\sigma(\lambda)$ вида

$$\sigma(\lambda) = \sum_{k=1}^n \mu_k \sigma_{\tau_k}(\lambda) \qquad \left(\mu_k > 0, \sum_{k=1}^n \mu_k = 1,\ n = 1, 2, \ldots\right) \tag{4}$$

в смысле сходимости в основном.

Следующие предложения имеют целью охарактеризовать множество тех функций $\tau(z)$ из N, которые по формуле (3) М. Г. Крейна порождают функции $\sigma(\lambda)$ из U.

Лемма 1. *Класс N замкнут в смысле сходимости в каждой точке, а класс N_0 образует в смысле такой сходимости всюду плотное в N множество.*

Лемма 2. *Класс N_0 совпадает с множеством функций $\tau(\zeta)$, представимых в виде*

$$\tau(\zeta) = -\left\{\zeta + \frac{1}{F(\zeta)}\right\}, \quad \text{где } F(\zeta) = \int_{-\infty}^\infty \frac{d\mu(t)}{t - \zeta} \tag{5}$$

и $\mu(t)$ — *произвольная неубывающая функция с полным изменением, равным единице.*

Теорема 1. *Замкнутая выпуклая оболочка ортогональных спектральных функций дифференциальной системы* (1) *порождается по формуле* (3) *совокупностью функций* $\tau(z) \in N$ *вида*

$$\tau(z) = \tau^*[u(z)], \tag{6}$$

где $\tau^*(u)$ — *произвольная функция от и класса N.*

Доказательство. Из (3) следует, что для принадлежности функции $\sigma(\lambda)$ к U' (т. е. представимости $\sigma(\lambda)$ в виде (4)) необходимо и достаточно, чтобы соответствующая ей функция удовлетворяла соотношению

$$\{\tau(z) + u(z)\}^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \{\tau_k + u(z)\}^{-1}. \tag{7}$$

Пусть теперь $\sigma(\lambda) \in U$. Если при этом $\sigma(\lambda) \in U'$, то из (7) и леммы 2 следует, что τ как функция от u принадлежит классу $N_0 \subset N$. Если же $\sigma(\lambda) \overline{\in} U'$, то $\sigma(\lambda)$ есть предел в основном некоторой последовательности функций $\sigma_n(\lambda) \in U'$, и соответствующая функции $\sigma(\lambda)$ функция $\tau(z)$ определится при помощи предельного перехода в (3) при $n \to \infty$, так что $\tau(z) = \lim \tau_n(z) = \lim \tau_n^*(u)$ и, в силу замкнутости класса N, будет $\lim \tau_n^*(u) = \tau^*(u) \in N$.

Пусть, обратно, $\tau(z)$ имеет вид (6). В силу леммы 1 существует последовательность $\tau_n^*(u) \in N_0$, сходящаяся к $\tau^*(u)$, и каждая из функций $\tau_n^*(u)$ представима в виде (5) при $\zeta = u$, $\mu(t) = \mu_n(t)$. Построим для каждого n последовательность $\mu_{nk}(t)$, сходящуюся в основном к $\mu_n(t)$ и такую, чтобы каждая из функций $\mu_{nk}(t)$ была кусочно-постоянной с конечным числом точек роста и полным изменением, равным единице. Далее построим по $\mu_{nk}(t)$ последовательность $\tau_{nk}^*(u)$ при помощи формул (5) при $\zeta = u$, $\mu(t) = \mu_{nk}(t)$. При $k \to \infty$ будет $\lim \tau_{nk}^*(u) = \tau_n^*(u)$. Выберем подпоследовательность $\tau_{nk_n}^*(u)$, сходящуюся к $\tau^*(u)$. Так как, очевидно, сп. функции $\sigma_{nk_n}(\lambda)$, соответствующие функциям $\tau_{nk_n}^*[u(z)]$, принадлежат U', то функция $\sigma(\lambda) = \lim \sigma_{nk_n}(\lambda)$ $(n \to \infty)$ также принадлежит U, что и требовалось доказать.

Применимость теоремы Хелли для функций с неограниченным изменением, использованной при доказательстве обеих частей теоремы 1, вытекает из исследований В. А. Марченко по асимптотике сп. функций ([5]).

Так как, согласно теореме 1, $U \neq V$, то экстремальные точки V не исчерпываются о. сп. функциями ([4]). Для нахождения других экстремальных точек V рассмотрим интерполяционную проблему

$$w(z_k) = w_k \quad (\operatorname{Im} z_k > 0;\ k = 1, 2, \ldots, n;\ n < \infty), \tag{8}$$

где

$$w(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z} \quad (\sigma \in V).$$

Из исследований Н. И. Ахиезера ([6]) вытекает, что для разрешимости этой проблемы при данном векторе $\{z_k\}$ необходима и достаточна неотрицательность эрмитовой формы

$$\sum_{i,k=1}^{n} \{w_i, w_k\} \xi_i \overline{\xi}_k, \tag{9}$$

где

$$\{w_i, w_k\} = \frac{w_i - \overline{w}_k}{z_i - \overline{z}_k} - \int_0^\infty [\psi(s, z_i) w_i + \varphi(s, z_i)] \overline{[\psi(s, z_k) w_k + \varphi(s, z_k)]}\, ds;$$

при этом проблема (8) будет определенной тогда и только тогда, когда форма (9) вырождается (в этом случае соответствующая функция $\tau(z)$ рациональна и вещественна).

При помощи тождества

$$\sum \{\mu^* w_i + \mu w_i^*,\ \mu^* w_k + \mu w_k^*\}\, \xi_i \overline{\xi}_k =$$

$$= \mu^* \sum \{w_i, w_k\}\, \overline{\xi}_i \xi_k + \mu \sum \{w_i^*, w_k^*\}\, \xi_i \overline{\xi}_k + \mu\mu^* \int_0^\infty \left| \sum \psi(s, z_j)(w_j - w_j^*)\, \xi_j \right|^2 ds$$

по индукции от $n-1$ к n устанавливается следующая теорема:

Теорема 2. *Если для данной пары векторов $\{z_k\}$ и $\{w_k\}$ интерполяционная проблема* (8) *является определенной, то соответствующая сп. функция $\sigma(\lambda)$ является экстремальной.*

Таким образом, любая вещественная рациональная функция $\tau(z)$ порождает по формуле (3) экстремальную сп. функцию*. Так как любую функцию $\tau(z) \in N$ можно аппроксимировать вещественными рациональными функциями из N, то замыкание полученных в теореме 2 экстремальных функций совпадает с V. Таким образом, имеет место:

Теорема 3. *Выпуклое множество V спектральных функций дифференциальной системы* (1) *является замыканием множества своих экстремальных точек.*

Харьковский политехнический
институт им. В. И. Ленина и
Харьковский авиационный институт

Поступило
14 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям, 1950. [2] М. Г. Крейн, ДАН, **89**, № 1 (1953). [3] М. Г. Крейн, Изв. АН СССР, сер. матем., **16**, № 4, 293 (1952). [4] М. Г. Крейн, Д. П. Мильман, Studia Math., **9** (1) (1940). [5] В. А. Марченко, Тр. Московск. матем. общ., **1** (1952). [6] Н. И. Ахиезер, Зап. Харьковск. матем. общ., сер. IV, **20** (1950). [7] М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., **11**, № 4, 327 (1947).

* Это утверждение вытекает из более общего результата, полученного ранее М. А. Наймарком ([7]) при помощи его теории самосопряженных расширений с выходом из пространства.