Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Е. И. ШЕМЯКИН

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ВЯЗКО-УПРУГОЙ СРЕДЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 26 III 1955)

В работах ([1], [2]) рассмотрена следующая задача:
Найти решение уравнения

$$\left(1+\omega\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta\varphi = a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{1}$$

при начальных данных

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0, \qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1; \tag{2}$$

ω, a — постоянные; φ_0 и φ_1 предполагаются сферически симметричными, т. е. $\varphi_0 = \varphi_0(r)$, $\varphi_1 = \varphi_1(r)$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$; Δ — лапласиан.

Рассмотрим более общие уравнения

$$L\mathbf{u} \equiv (\Lambda + 2\mathrm{M})\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - \mathrm{M}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2},$$
$$\Lambda = \lambda + \lambda'\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathrm{M} = \mu + \mu'\frac{\partial}{\partial t}; \tag{3}$$

λ, μ — постоянные Ляме; ρ — плотность; λ', μ' — вязкие или диссипативные постоянные ([3]).

Уравнения (3) известны в литературе под названием уравнений движения вязко-упругой среды. Уравнение (1) в теории вязко-упругой среды играет ту же роль, что и волновое уравнение в классической теории упругости. Поэтому и из соображений удобства в дальнейшем называем (1) «волновым».

1. Рассмотрим следующую задачу:

Найти поле смещений в вязко-упругом полупространстве $z = 0$ при сосредоточенных воздействиях, приложенных в момент $t = 0$ к его граничным (или внутренним) точкам.

Если вектор поля смещения представить через скалярный $\varphi(x, y, z, t)$ и векторный $\vec{\psi}(x, y, z, t)$ потенциалы:

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\vec{\psi}, \tag{4}$$

то упомянутую задачу можно сформулировать следующим образом:

Найти при $z > 0$ функции $\varphi(x, y, z, t)$ и $\vec{\psi}(x, y, z, t)$, удовлетворяющие «волновым» уравнениям

$$\left(1+\omega\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta\varphi = a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad \left(1+\omega_1\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta\vec{\psi} = b^2\frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2}, \tag{5}$$

где

$$a = \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}, \quad b = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}, \quad \omega = \frac{\lambda' + 2\mu'}{\lambda + 2\mu}, \quad \omega_1 = \frac{\mu'}{\mu}, \tag{6}$$

нулевым начальным условиям

$$\varphi|_{t=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big|_{t=0} = \vec{\psi}|_{t=0} = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \tag{7}$$

и следующим граничным условиям:

$$-T_{zz} = \left[\Lambda\Delta\varphi + 2M\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x\, \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y\, \partial z}\right)\right]\Big|_{z=0},$$
$$-T_{xz} = \ldots, \quad -T_{yz} = \ldots \tag{8}$$

Все граничные воздействия T_{zz}, T_{xz}, T_{yz} берем в виде

$$T = \frac{\delta(r)}{r} a(t) \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}), \tag{9}$$

$\delta(r)$ — функция Дирака; $a(t)$ удовлетворяет условиям, позволяющим применить к ней одностороннее преобразование Лапласа.

В дальнейшем считается $\omega = \omega_1$. В этом случае получены результаты, позволяющие провести качественное исследование решения более полное, чем при $\omega \neq \omega_1$. В последнем случае хотя и не удается получить основной формулы (см. ниже), но оказывается возможным изучить асимптотическое (при больших t) поведение поля возмущений нашей задачи, причем качественные результаты, полученные в предположении $\omega = \omega_1$, остаются справедливыми и при $\omega \neq \omega_1$.

Соответствующей задачей назовем (5)—(7)—(8) при $\omega = \omega_1 = 0$ и t, замененном на τ.

2. Рассмотрим вспомогательную задачу для функции $R(t, \tau)$:

$$\left(1 + \omega \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 R(t, \tau)}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 R(t, \tau)}{\partial t^2}, \quad R(t, \tau)|_{t=0} = \frac{\partial R(t, \tau)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \tag{10}$$

и

$$\left(1 + \omega \frac{\partial}{\partial t}\right) R(t, \tau)|_{\tau=0} = a(t).$$

Решение задачи (10) можно представить в явном виде:

$$R(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \frac{A(s)}{1 + \omega s} \exp\left[st - \frac{s\tau}{\sqrt{1 + \omega s}}\right] ds, \tag{11}$$

где

$$A(s) = \int_0^\infty a(t)\, e^{-st}\, dt, \quad \arg \sqrt{1 + \omega s} = 0 \text{ при } s > -\frac{1}{\omega} \tag{12}$$

и в качестве контура (l) выбрана прямая $\operatorname{Re} s = \sigma > 0$, параллельная мнимой оси, такая, что справа от нее подинтегральная функция в (11) регулярна.

3. Перейдем к цилиндрической системе координат и будем искать решение основной задачи в виде

$$\mathbf{u}(r, 0, z, t) = \int_0^\infty \mathbf{u}_0(r, 0, z, \tau)\, R(t, \tau)\, d\tau, \tag{13}$$

где $\mathbf{u}_0$ — новая искомая вектор-функция, а $R(t, \tau)$ — решение задачи (10). Непосредственной проверкой можно убедиться, что $\mathbf{u}_0(r, 0, z, \tau)$ есть решение соответствующей задачи, т. е. задачи о распространении нестационарных возмущений в идеально упругом полупространстве при воздействии типа (9) на его границе, если в качестве $a(t)$ взять $\delta(t)$ — обобщен-

ную функцию (функция Дирака). Формулу (13) в дальнейшем называем основной.

Заметим, что основную формулу можно получить, например, следующим путем:

Применим метод неполного разделения переменных ([4]) к построению решения основной задачи. Вследствие громоздкого вида решения и недостатка места последующие рассуждения иллюстрируем на типичном слагаемом, участвующем в описании поля смещений. Рассмотрим, например, следующее слагаемое:

$$I=\frac{1}{2\pi\mu}\int_0^\infty\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{A(s)M_aM_b}{(1+\omega s)R(s)}e^{st-zM_b}ds\right\}k^2J_1(kr)\,dk,$$

$$\operatorname{Re}s=\sigma>0,\quad M_a=\sqrt{\frac{a^2s^2}{1+\omega s}+k^2},\quad M_b=\sqrt{\frac{b^2s^2}{1+\omega s}+k^2},\qquad(14)$$

$$R(s)=\left(\frac{b^2s^2}{1+\omega s}+2k^2\right)^2-4k^2M_aM_b,$$

ветви радикалов фиксированы условиями

$$\arg M_a=\arg M_b=0\quad\text{при } s>0,$$

а $J_1(kr)$ — функция Бесселя первого порядка вещественного аргумента.

Применим к контурному интегралу в (14) преобразование Эфроса ([6]) с вспомогательной функцией

$$q(s)=\frac{s}{\sqrt{1+\omega s}}\quad\left(\arg\sqrt{1+\omega s}=0\text{ при }s>-\frac{1}{\omega}\right).$$

Тогда

$$I=\frac{1}{2\pi\mu}\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{(l_1)}\frac{\sqrt{a^2q^2+k^2}\sqrt{b^2q^2+k^2}}{\overline{R}(q)}\exp\left(q\tau-z\sqrt{b^2q^2+k^2}\right)dq\right]R(t,\tau)d\tau\right\}\times$$
$$\times\,k^2J_1(kr)\,dk,$$

где $\overline{R}(q)=(b^2q^2+2k^2)^2-4k^2\sqrt{a^2q^2+k^2}\sqrt{b^2q^2+k^2}$, а контуры (l_1) и (l) из формулы (11) выбраны так, чтобы выполнялось условие применимости преобразования Эфроса

$$\operatorname{Re}q(\sigma_0+i\tau)>\sigma\quad(\sigma_0>\sigma>0;\ -\infty<\tau<\infty).$$

Переставим порядок интегрирования по k и τ в предположении об абсолютной сходимости интеграла по τ:

$$I=\int_0^\infty\left\{\frac{1}{2\pi\mu}\int_0^\infty\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{(l_1)}\frac{\sqrt{a^2q^2+k^2}\sqrt{b^2q^2+k^2}}{\overline{R}(q)}\exp\left(q\tau-z\sqrt{b^2q^2+k^2}\right)dq\right]k^2J_1(kr)\,dk\right\}\times$$
$$\times\,R(t,\tau)\,d\tau.$$

Проделаем указанные преобразования над каждым слагаемым решения.

Сравнение выражения в фигурной скобке под знаком интеграла по τ с известным решением для упругого полупространства ([5]) приводит к заключению о справедливости основной формулы.

4. Пример. Известно ([5]), что для упругого полупространства при воздействии $T_{x^2}=\frac{\delta(r)}{r}\delta(t)$, $T_{zz}=T_{yz}=0$ главная часть u_0 составляющей (поперечные волны) описывается слагаемым

$$u_{00}=\frac{1}{2\pi\mu}\int_0^\infty\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1}{\sqrt{b^2s^2+k^2}}\exp\left(st-z\sqrt{b^2s^2+k^2}\right)\right\}kJ_0(kr)\,dk.$$

Интегралы вычисляются и

$$u_{0\theta} = \frac{1}{2\pi\mu b} \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{b}\sqrt{t^2 - b^2 z^2}}} \delta\left(\frac{1}{b}\sqrt{t^2 - b^2 z^2} - r\right).$$

Подставив $u_{0\theta}$ в основную формулу и выполнив интегрирование по τ, получим следующее простое описание поперечных волн в вязко-упругой среде:

$$u_\theta = \frac{1}{2\pi\mu} \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} R\left(t, b\sqrt{r^2 + z^2}\right).$$

Если учесть, что для $R(t, \tau)$ (при $A(s) = 1$) можно дать асимптотическое представление при больших t:

$$R(t, \tau) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\omega\tau}} \exp\left(-\frac{(t-\tau)^2}{2\omega\tau}\right),$$

то для главной части u_θ окончательно получаем

$$u_\theta \approx \frac{1}{2\pi\mu\sqrt{2\pi\omega}} \cdot \frac{1}{(r^2 + z^2)^{3/4}} \exp\left[-\frac{(t - b\sqrt{r^2 + z^2})^2}{2\omega b\sqrt{r^2 + z^2}}\right].$$

5. Для полного исследования решения согласно основной формуле необходимо изучить $\mathbf{u}_0(r, \theta, z, \tau)$. Последнее можно выполнить различными путями:

а) представить $\mathbf{u}_0(r, \theta, z, \tau)$ в виде интегралов, полученных по методу функционально-инвариантных решений В. И. Смирнова и С. Л. Соболева;

б) применить асимптотические методы изучения волновых полей, как в ([4]).

В заключение сделаем несколько замечаний по поводу основной формулы. Непосредственное изучение решения в форме (14) приводит к заключению о справедливости основной формулы для более широкого круга граничных задач для вязко-упругой среды:

а) для задачи о распространении нестационарных возмущений в вязко-упругой сфере (в качестве $\mathbf{u}_0$ следует взять решение соответствующей задачи для упругой сферы ([7])) при $\omega = \omega_1$.

б) для задачи о распространении нестационарных возмущений в вязко-упругой среде с плоско-параллельными границами раздела (слоистые среды). В этом случае в дополнение к условию $\omega = \omega_1$ приходится предположить, что ω — одна и та же величина для всех слоев (последнее отнюдь не означает равенства диссипативных постоянных для всех слоев!).

Столь же простое обобщение основной формулы можно указать и для других неидеально-упругих сред, описываемых уравнениями (3), где Λ и M — линейные дифференциальные операторы произвольного порядка по времени с постоянными коэффициентами. В этом случае для получения (13) пришлось бы предположить выполнение некоторых условий типа $\omega = \omega_1$, что, по нашему мнению, не препятствует качественному исследованию решения.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
16 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. С. Войт, ДАН, 88, № 2, 221 (1953). [2] N. Ricker, Geophysics, 18, No. 1, 10 (1953). [3] Л. М. Качанов, Механика пластических сред, 1948. [4] Г. И. Петрашень, Г. И. Марчук, К. И. Огурцов. Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., № 135, в. 21, 71 (1950). [5] Е. И. Шемякин, В. Л. Файншмидт, Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., № 177, в. 28, 148 (1954). [6] А. М. Эфрос, А. Н. Данилевский, Операционное исчисление и контурные интегралы, 1937. [7] Г. И. Петрашень, Н. С. Смирнова, Б. Я. Гельчинский, Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., № 170, в. 27, 221 (1953).