Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 1

МАТЕМАТИКА

А. С. ШВАРЦ

ГОМОЛОГИИ СПИНОРНОЙ ГРУППЫ

(Представлено академиком П. С. Александровым 20 V 1955)

Спинорной группой $\mathrm{Spin}(n)$ называется универсальная (двулистная) накрывающая группы вращений $SO(n)$. Накрытие $\mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$ обозначается через p, умножение $\mathrm{Spin}(n) \times \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{Spin}(n)$ — через h.

Борель установил ([1]) следующие факты о гомологиях группы $\mathrm{Spin}(n)$:

1) Все коэффициенты кручения многообразия $\mathrm{Spin}(n)$ равны 2.

2) Алгебра когомологий $\bmod 2$ $H^*(\mathrm{Spin}(n), Z_2)$ группы $\mathrm{Spin}(n)$ обладает простой системой (определение простой системы см. в ([1])) образующих $\eta_3, \eta_5, \eta_6, \eta_7, \eta_9, \ldots, \eta_i$, причем $\dim \eta_i = i$, $\dim \eta = 2^{s(n)} - 1$, где число $s(n)$ определяется неравенствами $2^{s(n)-1} < n < 2^{s(n)}$, а индексы у η_i пробегают все числа от 3 до $n-1$, не являющиеся степенями двойки. Элементы η_i составляют систему образующих подалгебры $p^*H^*(SO(n), Z_2)$ и определяются однозначно требованием их примитивности; за η может быть принят любой класс когомологий размерности $2^{s(n)} - 1$, не содержащийся в $p^*H^*(SO(n), Z_2)$. Элементы η_i связаны соотношениями $Sq^k\eta_i = \binom{i}{k}\eta_{i+k}$, если $i + k \leqslant n - 1$ и $i + k \neq 2^a$; $Sq^k\eta_i = 0$ в противном случае.

3) Алгебра Понтрягина $\bmod 2$ группы $\mathrm{Spin}(n)$ является коммутативной внешней алгеброй при $n \leqslant 9$. При $n = 10$ эта алгебра вычислена.

4) При $n \geqslant 10$ алгебра Понтрягина $\bmod 2$ группы $\mathrm{Spin}(n)$ некоммутативна.

5) Классифицирующая алгебра $\bmod 2$ $H^*(B_{\mathrm{Spin}(n)}, Z_2)$ группы $\mathrm{Spin}(n)$ является алгеброй полиномов лишь при $n \leqslant 9$. При $n = 10$ эта алгебра вычислена. При $n \geqslant 10$ ряд Пуанкаре этой алгебры отличен от ряда Пуанкаре полиномов.

Однако утверждение 4) о некоммутативности алгебры Понтрягина неверно. Данное Борелем доказательство опирается на неопубликованную теорему А. Картана, которая, как показывают результаты настоящей заметки, неверна. Кроме того, данное Борелем доказательство утверждения 5) о классифицирующих алгебрах не проходит при $n = 2^a + 1$.

В настоящей заметке полностью вычисляется алгебра Понтрягина $\bmod 2$ группы $\mathrm{Spin}(n)$ и дается годное для всех значений n доказательство утверждения 5), сформулированного выше. Вычисляется также действие квадратов Стинрода в алгебре $H^*(\mathrm{Spin}(n), Z_2)$.

Вычисление алгебры Понтрягина равносильно вычислению значений хопфовского гомоморфизма

$$h^*\colon\ H^*(\mathrm{Spin}(n), Z_2) \to H^*(\mathrm{Spin}(n) \times \mathrm{Spin}(n), Z_2) =$$

$$= H^*(\mathrm{Spin}(n), Z_2) \otimes H^*(\mathrm{Spin}(n), Z_2)$$

на образующих алгебры $H^*(\mathrm{Spin}(n), Z_2)$.

Теорема 1. *Указанную в утверждении* 2) *образующую* η *можно выбрать так, что*

$$h^*\eta = \eta \otimes 1 + 1 \otimes \eta + \sum \eta_j \otimes \eta_k,$$

где суммирование распространено на все пары натуральных чисел j, k, *для которых* $j + k = 2^{s(n)} - 1$, j *четно и не равно степени двух.*

При таком выборе образующей η *имеют место соотношения* $Sq^1\eta = \sum \eta_j \eta$ (*индексы* j *и* k *пробегают такие пары четных натуральных чисел, не являющихся степенями двойки, что* $j < k$, $j + k = 2^{s(n)} - 1$, $Sq^k\eta = 0$ *при* $k > 1$).

Следствие 1. *Алгебра* $H^*(\mathrm{Spin}(n), Z_2)$ *тогда и только тогда имеет примитивную систему образующих, когда* $n \leqslant 9$ *или* $n = 2^a + 1$.

Следствие 2. *Алгебра Понтрягина* mod 2 *группы* $\mathrm{Spin}(n)$ *коммутативна лишь при* $n \leqslant 9$ *или* $n = 2^a + 1$ *и является при этих значениях* n *внешней алгеброй.*

Следствие 1 доказывается непосредственным подсчетом. Следствие 2 вытекает из теоремы 1 и предложений 2.5 и 2.8 работы [1] (заметим, что данное в [1] доказательство предложения 2.8b) содержит неточность, но может быть исправлено).

Доказательство. 1. В [2] доказаны следующие факты. Существует клеточное разбиение группы $SO(n)$, состоящее из нульмерной клетки ( ) и клеток вида $(i_1, \ldots, i_k)$, где $i_1, \ldots, i_k$ — совокупность попарно различных натуральных чисел, не превосходящих $n-1$. Размерность клетки $(i_1, \ldots, i_k)$ равна $i_1 + \ldots + i_k$. Все коэффициенты инцидентности четны, и потому каждой клетке $(i_1, \ldots, i_k)$ ставится в соответствие класс когомологий mod 2 $\xi_{i_1,\ldots,i_k}$. Клетке $(i_1, \ldots, i_k)$ естественным образом соответствует цепь mod 2, которую мы также будем обозначать $(i_1, \ldots, i_k)$. В дальнейшем удобно считать, что цепь $(i_1, \ldots, i_k)$ и класс когомологий $\xi_{i_1,\ldots,i_k}$ определены для любой совокупности $i_1, \ldots, i_k$ натуральных чисел, но обращаются в нуль, если в этой совокупности содержатся два равных числа или число $\geqslant n$. Классы когомологий ξ_i составляют в $H^*(SO(n), Z_2)$ простую систему примитивных образующих. Имеют место соотношения: $\xi_{i_1,\ldots,i_k} \cdot \xi_j = \xi_{i_1,\ldots,i_k,j} + \sum_{r=1}^{k} \xi_{i_1,\ldots,i_r+j,\ldots,i_k}$. Умножение $SO(n) \times SO(n) \to SO(n)$ оказывается клеточным отображением и порождает понтрягинское умножение $\vee$ в группе цепей, причем $(i_1, \ldots, i_k) \vee (j_1, \ldots, j_l) = (i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l)$.

2. Накрытие p: $\mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$ порождает клеточное разбиение пространства $\mathrm{Spin}(n)$: каждой клетке $(i_1, \ldots, i_k)$ разбиения $SO(n)$ ставятся в соответствие две клетки $(i_1, \ldots i_k)$ и $\overline{(i_1, \ldots, i_k)}$ разбиения $\mathrm{Spin}(n)$. При этом по mod 2 имеем $\nabla(i_1, \ldots, i_k) = \nabla\overline{(i_1, \ldots, i_k)} = (1, i_1, \ldots, i_k) + \overline{(1, i_1, \ldots, i_k)} + \sum_{r=1}^{k} (i_1, \ldots, i_r + 1, \ldots, i_k) + \sum_{r=1}^{k} \overline{(i_1, \ldots, i_r + 1, \ldots, i_k)}$. Каждой клетке ставится в соответствие цепь mod 2, обозначаемая тем же символом. Считаем, что цепи $(i_1, \ldots, i_k)$ и $\overline{(i_1, \ldots, i_k)}$ равны нулю, если совокупность $i_1, \ldots i_k$ содержит два равных числа или число $\geqslant n$. Умножение $\mathrm{Spin}(n) \times \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{Spin}(n)$ клеточно и определяет умножение $\vee$ в группе цепей. Имеем $(i_1) \vee \ldots \vee (i_k) = \overline{(i_1, \ldots, i_k)}$, если перестановка $i_1, \ldots i_k$ четная; $(i_1) \vee \ldots \vee (i_k) = (i_1, \ldots, i_k)$, если перестановка $i_1, \ldots, i_k$ нечетная.

3. Имеем $\eta_l = p^*\xi_l$, и поэтому представителем класса когомологий η_l является коцикл $(l) + \overline{(l)}$. За η можно принять класс когомологий коцикла $\Sigma(m_1, \ldots, m_t)$, где суммирование распространено на все сово-

купности $m_1, \ldots, m_t$, для которых $m_1 + \ldots + m_t = 2^{s(n)} - 1$, а числа m_i и m_j при $i \neq j$ не содержат в двоичном разложении одинаковых степеней двойки. В самом деле, размерность этого класса равна $2^{s(n)}-1$, и он не содержится в $p^*H^*(SO(n), Z_2)$ (любой коцикл, представляющий класс когомологий из $p^*H^*(SO(n), Z_2)$ содержит вместе с клеткой $(i_1, \ldots i_k)$ клетку $\overline{(i_1, \ldots i_k)}$).

4. Мономы $\eta_{i_1} \ldots \eta_{i_q}$ $(i_1 < \ldots < i_q)$ размерности $\leqslant 2^{s(n)}-2$ образуют базу алгебры $H^*(\mathrm{Spin}(n), Z_2)$ в размерностях $\leqslant 2^{s(n)}-2$. Возьмем двойственную базу $\{Y_{i_1, \ldots, i_q}\}$ группы гомологий $H(\mathrm{Spin}(n), Z_2)$ в размерностях $\leqslant 2^{s(n)}-2$. Имеем $Y_{i_1, \ldots, i_q} = Y_{i_1} \vee \ldots \vee Y_{i_q}$ ([1], 2.8), $Y_i \vee Y_j = Y_j \vee Y_i$ при $i + j \leqslant 2^{s(n)}-2$ ([1], 2.5). Вычисляем $\langle p_* Y_i, \xi_i \rangle = \langle Y_i, p^* \xi_i \rangle = \langle Y_i, \eta_i \rangle = 1$; $\langle p_* Y_i, \xi_{j, i-j} \rangle = \langle p_* Y_i, \xi_j \xi_{i-j} + \xi_i \rangle = \langle Y_i, \eta_j \eta_{i-j} + \eta_i \rangle = 1$, $i \neq 2j$, где скобки $\langle\ \rangle$ обозначают скалярное произведение. По индукции доказываем, что $\langle p_* Y_i, \xi_{j_1, \ldots, j_k} \rangle = 0$, если $k \geqslant 3$ и в совокупности $j_1, \ldots, j_k$ нельзя выделить двух таких непересекающихся подмножеств $j_{\alpha_1}, \ldots, j_{\alpha_t}$ и $j_{\beta_1}, \ldots, j_{\beta_v}$, что $j_{\alpha_1} + \ldots + j_{\alpha_t} = j_{\beta_1} + \ldots + j_{\beta_v}$. В частности, $\langle p_* Y_i, \xi_{j_1, \ldots, j_k} \rangle = 0$, если $k \geqslant 3$ и двоичные разложения j_t и j_v не содержат одинаковых степеней двойки при $t \neq v$. Отсюда и из того, что отображение p_* является изоморфизмом в размерностях $\leqslant 2^{s(n)}-2$, следует, что класс Y_i содержит цикл вида $(i) + \sum_{0 < 2j < i} (j, i-j) + \ldots$, где точками заменены такие цепи вида $(j_1, \ldots, j_k)$, что $k \geqslant 3$ и по крайней мере для одной пары $t \neq v$ двоичные разложения j_t и j_v содержат одинаковые степени двойки.

5. Положим $h^*\eta = \eta \otimes 1 + 1 \otimes \eta + \sum \varepsilon^{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}_{\beta_1, \ldots, \beta_s} \eta_{\alpha_1} \ldots \eta_{\alpha_r} \otimes \eta_{\beta_1} \ldots \eta_{\beta_s}$. Имеем $\varepsilon^{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}_{\beta_1, \ldots, \beta_s} = \langle Y_{\alpha_1, \ldots, \alpha_r} \otimes Y_{\beta_1, \ldots, \beta_s}, \quad h^*\eta \rangle = \langle Y_{\alpha_1} \vee \ldots \vee Y_{\alpha_r} \vee Y_{\beta_1} \vee \ldots \vee Y_{\beta_s}, \eta \rangle$.

6. Таким образом, задача сводится к вычислению скалярного произведения $\langle Y_{i_1} \vee \ldots \vee Y_{i_r}, \eta \rangle$. Легко видеть, что если $\langle Y_{i_1} \vee \ldots \vee Y_{i_r}, \eta \rangle = 1$, то $i_1 + \ldots + i_r = 2^{s(n)}-1$ и двоичные разложения i_t и i_v не содержат одинаковых степеней двойки при $t \neq v$. Если выполнено это условие, то $\langle Y_{i_1} \vee \ldots \vee Y_{i_r}, \eta \rangle$ по mod 2 равно числу четных перестановок, получающихся из перестановки $(i_1, \ldots, i_k)$ заменой некоторого количества i_v такими парами j_v, k_v, что $j_v + k_v = i_v$, $0 < j_v < k_v$, двоичные разложения j_v и k_v не содержат одинаковых степеней двойки. Пусть $i_v = 2^{t_{v1}} + \ldots + 2^{t_{v, \alpha_v}}$ $(t_{v, \alpha} < t_{v, \alpha+1})$. Положим $a_v = t_{v1}$, $b_v = t_{v, \alpha_v}$. По mod 2 $\langle Y_{i_1} \vee \ldots \vee Y_{i_r}, \eta \rangle$ равно числу четных перестановок, получающихся из перестановки $(a_1, b_1, \ldots, a_r, b_r)$ вычеркиванием некоторого количества a_v. Теперь уже легко видеть, что при нечетном i_1 $\langle Y_{i_1} \vee \ldots \vee Y_{i_r}, \eta \rangle = 0$. Отсюда вытекает, что при $r \geqslant 3$ $\langle Y_{i_1} \vee \ldots \vee Y_{i_r}, \eta \rangle = 0$, так как в этом случае можно переставлять сомножители. Непосредственным подсчетом показываем, что $\langle Y_{2i} \vee Y_j, \eta \rangle = 1$, если $2i + j = 2^{s(n)}-1$. Наше выражение для $h^*\eta$ получено.

Теорема 2. *Классифицирующая алгебра* $\mathrm{Spin}(n)$ mod 2 $H^*(B_{\mathrm{Spin}(n)}, Z_2)$ *при* $n \geqslant 10$ *имеет ряд Пуанкаре отличный, от ряда Пуанкаре алгебры полиномов.*

Доказательство. Классифицирующая алгебра группы $SO(n)$ mod 2 есть алгебра полиномов с образующими $w_2, \ldots, w_n$ $(\dim w_i = i)$. Полагаем $v_i = w_i$ $(i \neq 2^a + 1)$, $v_2 = w_2$, $v_{2j+1} = Sq_1 v_{2j-1+1}$ $(0 < j < s(n))$. Обозначим через $L(k)$ идеал, порожденный элементами v_{2^j+1} $(0 \leqslant j < k)$; через $I(k)$ — идеал, порожденный элементами $w_2, \ldots, w_k$; через $N(k)$ — идеал, порожденный элементами $w_k, w_{k+1}, \ldots, w_n$.

Борель показал ([1]), что для того, чтобы алгебра $H^*(B_{\mathrm{Spin}(n)}, Z_2)$

имела такой же ряд Пуанкаре, как у алгебры полиномов, необходимо и достаточно, чтобы $Sq_1 v_{2^{s(n)-1}+1} \in L(s(n))$. Оказывается, что при $s(n)$ нечетном

$$Sq_1 v_{2^{s(n)-1}+1} \equiv w^3_{1/2(2^{s(n)}+1)} \left(\mathrm{mod}\ L(s(n)) + I\left(\frac{2^{s(n)}-2}{3}\right) + N(2^{s(n)-1}+2)\right),$$

а при $s(n)$ четном

$$Sq_1 v_{2^{s(n)-1}+1} \equiv w_{1/2(2^{s(n)}-1)} w^2_{1/2(2^{s(n)}+2)} + w_{1/2(2^{s(n)}+5)} w^2_{1/2(2^{s(n)}-1)}$$

$$\left(\mathrm{mod}\ L(s(n)) + I\left(\frac{2^{s(n)}-4}{3}\right) + N(2^{s(n)-1}+2)\right).$$

В обоих случаях при $n \geqslant 10$ отсюда следует, что $Sq_1 v_{2^{s(n)-1}+1} \notin L(s(n))$, что доказывает теорему.

Теорема 3. *Пусть* $\Sigma_2, \Sigma_4, \ldots, \Sigma_{n-1}$ (*соответственно*, $\Sigma_2, \Sigma_4, \ldots, \Sigma_{n-2}, \Omega_{1/2 n}$) — *канонический набор примитивных классов слабых гомологий в* $SO(n)$ *при нечетном* n (*соответственно, при четном* n), *построенный в* [3]. *Можно так выбрать канонический набор примитивных классов слабых гомологий в* $\mathrm{Spin}(n)$: $\tilde{\Sigma}_2, \tilde{\Sigma}_4, \ldots, \tilde{\Sigma}_{n-1}$ *при нечетном* n, $\tilde{\Sigma}_2, \tilde{\Sigma}_4, \ldots, \tilde{\Sigma}_{n-2}, \tilde{\Omega}_{1/2 n}$ *при четном* n, *что:* а) *при* n, *не являющемся степенью двух,* $p_* \tilde{\Sigma}_{2i} = 2\Sigma_{2i}$, *если* $2i$ — *наибольшая степень двойки, не превышающая* $n-1$; $p_* \tilde{\Sigma}_{2i} = \Sigma_{2i}$ *при остальных* i; $p_* \tilde{\Omega}_{1/2 n} = \Omega_{1/2 n}$ *для четного* n; б) *при* $n = 2^s$ $p_* \tilde{\Sigma}_{2i} = \Sigma_{2i}$ *при* $2i \neq {}^1/_2 n$; $p_* \tilde{\Sigma}_{1/2 n} = \Sigma_{1/2 n} + \Omega_{1/2 n}$, $p_* \tilde{\Omega}_{1/2 n} = -\Sigma_{1/2 n} + \Omega_{1/2 n}$.

Пользуюсь случаем выразить благодарность В. Г. Болтянскому, любезно взявшему на себя труд редактирования и проверки этой работы, а также М. М. Постникову, проверившему эту работу.

Ивановский государственный
педагогический институт

Поступило
11 V 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Borel, Am. J. Math., 76, No. 2, 273 (1954). [2] C. Miller, Ann. of Math., 57, No. 1, 90 (1953). [3] Е. Б. Дынкин, Усп. матем. наук, 8, в. 5, 73 (1953).