Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 1

МАТЕМАТИКА

Р. З. ХАСЬМИНСКИЙ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ТРАЕКТОРИИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА ДИФФУЗИОННОГО ТИПА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 21 V 1955)

Пусть $X(t)$ — траектория одномерного случайного процесса диффузионного типа ([1,2]). Предположим, что в начальный момент частица находилась в точке x интервала (r_1, r_2) и обозначим через $\tau(x)$ время до первого достижения ею одного из концов этого интервала. Нашей задачей является изучение распределения вероятностей случайной величины $\zeta(x) = \int_0^{\tau(x)} V[X(t)]\,dt$, где $V(x)$ — функция на интервале (r_1, r_2), непрерывная или имеющая точки разрыва 1-го рода, которые не имеют предельных точек внутри (r_1, r_2).

В частности, если положить $V(x) \equiv 1$, то $\zeta(x) = \tau(x)$. Этот случай был рассмотрен в ([2,3]). Одномерный диффузионный процесс определяется плотностью вероятности перехода $u(x, t, y)$, являющейся фундаментальным решением дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1}$$

(первое дифференциальное уравнение Колмогорова).

Если предположить, что для $r_1 < x < r_2$ функции $a(x)$ и $b'(x)$ непрерывны и $b(x) > 0$, то всегда можно построить на отрезке $[r_1, r_2]$ процесс, удовлетворяющий уравнению (1). Вообще говоря, таких процессов будет бесконечно много ([2]). Однако распределения $\zeta(x)$ для всех них совпадают и должны описываться через коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$.

Условимся говорить, что данная траектория $X(t)$ притягивается к границе r_j, если существует (конечное или равное $+\infty$) значение t_0 такое, что $X(t) \to r_j$ при $t \to t_0$. Назовем границу r_j притягивающей, если событие «$X(t)$ притягивается к r_j» имеет положительную вероятность. В противном случае будем говорить, что граница r_j отталкивающая. Положим $W(x) = \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} \frac{a(y)}{b(y)}\,dy\right\}$.

Лемма 1. *Для того чтобы граница r_j была притягивающей, необходимо и достаточно, чтобы функция $W(x)$ была интегрируемой в окрестности этой границы.*

Функция $V(x)$ может быть и неограниченной, а $\tau(x)$ может с положительной вероятностью быть бесконечным, поэтому интеграл $\int_0^{\tau(x)} V[X(t)]\,dt$ может расходиться с положительной вероятностью.

Пусть r_j — притягивающая граница. Обозначим $C(x, r_j)$ множество

траекторий таких, что $X(0)=x$, для которых $X[\tau(x)]=r_j$. Основным результатом настоящей заметки являются следующие теоремы.

Теорема 1. $\int_0^{\tau(x)} V[X(t)]\,dt$ *абсолютно сходится для почти всех траекторий из множества* $C(x, r_j)$, *если функция*

$$R(x)=W(x)\int_{x_0}^{x}|V(y)|\,b^{-1}\,W^{-1}(y)\,dy$$

интегрируема в окрестности границы r_j. *Если* $R(x)$ *не интегрируема в окрестности* r_j, *то для почти всех траекторий из множества* $C(x, r_j)$

$$\int_0^{\tau(x)}|V[X(t)]|\,dt=+\infty.$$

Обозначим $Q_s^{(r_j)}(x)=\int_{C(x,\,r_j)}\exp\{is\zeta(x)\}\,d\mu=M\{e^{is\zeta(x)}/X[\tau(x)]=r_j\}\times$ $\times P\{X[\tau(x)]=r_j\}$ (здесь μ — мера на множестве траекторий $X(t)$ процесса).

Теорема 2. *Если* r_1 — *притягивающая граница и функция* $R(x)$ *интегрируема в окрестности* r_1, *то величина* $Q_s^{(r_1)}(x)$ *является единственным ограниченным по модулю решением дифференциального уравнения*

$$b(x)\,Z''+a(x)\,Z'+isV(x)\,Z=0, \tag{2}$$

удовлетворяющим граничным условиям:

А. *В случае, когда* r_2 — *также притягивающая граница,*

$$Z(x)\underset{x\to r_1}{\to}1;\quad Z(x)\underset{x\to r_2}{\to}0.$$

В. *В случае, когда* r_2 — *отталкивающая граница,*

$$Z(x)\underset{x\to r_1}{\to}1.$$

Теорема 2′. *Если хотя бы одна из границ притягивающая и функция* $R(x)$ *интегрируема в окрестности каждой притягивающей границы, то* $\int_0^{\tau(x)}V(X(t))\,dt$ *абсолютно сходится с вероятностью единица, а характеристическая функция* $Me^{is\zeta(x)}$ *величины* $\zeta(x)$ *является единственным ограниченным решением уравнения* (2), *удовлетворяющим условию* $z=1$ *на каждой притягивающей границе.*

В случае, когда $V(x)$ имеет разрывы, выражение «функция z является решением уравнения (2)» надо понимать в том смысле, что $Z(x)$ удовлетворяет уравнению (2) во всех точках непрерывности $V(x)$ и непрерывна вместе с 1-й производной в точках разрыва $V(x)$.

Следствие 1. При $s=0$ теорема 2 дает некоторое обобщение результата Хинчина из [4].

Следствие 2. Рассмотрим процесс без переноса, т. е. процесс с коэффициентом $a(x)\equiv 0$. (Заметим, что любой одномерный марковский процесс преобразованием независимой переменной $y=\int_{x_0}^{x}W(u)\,du$ может

быть сведен к процессу без переноса.) Для него уравнение (2) имеет вид

$$b(x)Z'' + isV(x)Z = 0.$$

Оно равносильно уравнению

$$Z'' + is\frac{V(x)}{b(x)}Z = 0.$$

Отсюда вытекает следующий результат. Распределение $\zeta(x) = \int_0^{\tau(x)} V(X(t))\,dt$ в процессе без переноса совпадает с распределением $\int_0^{\tau(x)} \frac{V(X(t))}{b(X(t))}\,dt$ в винеровском процессе (для которого $a \equiv 0$ и $b \equiv 1$).

Теоремы 2 и 2′ позволяют получить уравнения для $M_n^{(r_1)}(x) = \int_{C(x,\,r_1)} \left\{\int_0^{\tau(x)} V[X(t)]\,dt\right\}^n d\mu$, а также для $M_n(x) = M\left\{\left[\int_0^{\tau(x)} V[X(t)]\,dt\right]^n\right\}$.

А именно, в случае, когда $M\left\{\left[\int_0^{\tau(x)} |V(X(t))|\,dt\right]^n / X(\tau(x)) = r_1\right\} \times P\{X(\tau(x)) = r_1\} < +\infty$, величина $M_n^{(r_1)}(x)$ является единственным решением дифференциального уравнения

$$b(x)\frac{d^2 Z_n}{dx^2} + a(x)\frac{dZ_n}{dx} + nV(x)Z_{n-1} = 0, \tag{3}$$

удовлетворяющим условиям:

А. В случае, когда граница r_2 тоже притягивающая,

$$Z_n(r_1) = Z_n(r_2) = 0.$$

В. В случае, когда граница r_2 отталкивающая,

$$Z_n(r_1) = 0; \quad W^{-1}(x)\frac{dZ_n}{dx} \xrightarrow[x \to r_2]{} 0.$$

Здесь

$$Z_0(x) = \int_x^{r_2} W(y)\,dy \Big/ \int_{r_1}^{r_2} W(y)\,dy.$$

Величина $M_n(x)$ является единственным решением уравнения (3) при вышеуказанных граничных условиях с $Z_0(x) \equiv 1$. Уравнение (3) при указанных граничных условиях можно проинтегрировать в квадратурах, что позволяет найти необходимое и достаточное условие существования конечного n-го момента у случайной величины $\int_0^{\tau(x)} |V(X(t)|\,dt$.

Пример. Пусть граница r_1 отталкивающая. Тогда для $r_1 < x < y < r_2$ время $\tau_{x,\,y}$ до 1-го попадания в точку y частицы, выходящей из точки x, с вероятностью единица конечно. Уравнение (3) позволяет найти необходимые и достаточные условия того, чтобы величина $\tau_{y,\,x}$ имела конечные моменты. Например, для того, чтобы $M\tau_{x,\,y} < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы функция $b^{-1} \cdot W^{-1}$ была интегрируема в окрестности r_1.

Теорема 3. *Для того чтобы величина*

$$\widetilde{Q}^{(r_1)}(x) = \int_{C(x,\,r_1)} e^{\zeta(x)}\,d\mu = M\{e^{\zeta(x)} / X(\tau(x)) = r_1\} \cdot P\{X(\tau(x)) = r_1\}$$

была конечной, необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$b(x)Z'' + a(x)Z' + V(x)Z = 0 \qquad (4)$$

имело решение, не обращающееся в нуль на полуинтервале $[r_1, r_2)$. *В этом случае* $\tilde{Q}^{(r_1)}(x)$ *является единственным решением уравнения* (4) *при условиях*:

А. $Z(r_1) = 1$; $Z(r_2) = 0$, *если обе границы притягивающие.*

Б. $Z(x)$ — *наименьшее положительное решение, удовлетворяющее условию* $Z(r_1) = 1$, *если* r_2 — *отталкивающая граница.*

Аналогичный результат верен и для величины $Me^{\zeta(x)}$.

Замечание. Из теоремы 3, полагая $V_1 = isV$, можно, исследовав дополнительно свойства решений уравнения (2), получить теорему 2. Однако доказательство теоремы 3 использует теорему 2.

Пример 1. Пусть $b(x) = 1$; $a(x) = 0$; $V(x) = 1$. Тогда, применяя теорему 3, получим следующий результат: в винеровском процессе случайная величина $e^{\tau(x)}$ имеет конечное математическое ожидание тогда и только тогда, когда $|r_2 - r_1| < \pi$.

Пример 2. Пусть $V(x) > 0$. Тогда случайная величина $\exp\left[-u\int\limits_0^{\tau(x)} V(x(t))\,dt\right]$ $(u > 0)$ имеет, очевидно, конечное математическое ожидание. Применяя к ней теорему 3, получим дифференциальное уравнение для преобразования Лапласа от плотности вероятности распределения случайной величины $\zeta(x)$ при $V > 0$. В ряде случаев удается решить это уравнение и, делая обратное преобразование Лапласа, найти в явном виде распределение случайной величины $\zeta(x)$.

Пусть, например, ξ — случайная величина, равная времени, проведенному правее точки b частицей, выходящей из b, до 1-го достижения ею точки a в винеровском случайном процессе. В этом случае $V(x) = 1$ для $x > b$; $V(x) = 0$ для $a \leqslant x \leqslant b$. Решая уравнение (4) для этого случая, получим

$$Me^{-u\xi} = \frac{1}{1 + (b-a)\sqrt{2u}}.$$

Отсюда, делая обратное преобразование Лапласа, получим

$$P\{\xi < 2t(b-a)^2\} = 0 \text{ для } t < 0,$$

$$P\{\xi < 2t(b-a)^2\} = 1 - \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\sqrt{t}}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \text{ для } t \geqslant 0.$$

При получении теоремы 2 использованы результаты Е. Б. Дынкина и метод, развитый им в [5]

Приношу глубокую благодарность Е. Б. Дынкину за руководство и помощь, оказанную при написании этой заметки, и А. Н. Колмогорову за ряд существенных замечаний.

Поступило
21 V 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Math. Ann., 104, 415 (1931). [2] W. Feller, Trans. Am. Math. Soc., 77, No. 1 (1954). [3] D. A. Darling, A. J. Siegert, Ann. Math. Statist., 24, 624 (1953). [4] А. Я. Хинчин, Асимптотические законы теории вероятностей, 1936. [5] Е. Б. Дынкин, Укр. матем. журн., 6, № 1 (1954).