Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 1

МАТЕМАТИКА

К. М. СЛЕПЕНЧУК

ОБ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ АБЕЛЯ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 V 1955)

Из сходимости произведения $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)=Q$ не следует $\lim\limits_{x\to 1}\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_nx^n)=Q$ (2). Однако $\lim\limits_{x\to 1}\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_nx^{k_n})=Q$, если $\frac{1}{k_n}(k_1+k_2+\ldots+k_n)<M$ (3). Заметим, что если произведение таково, что сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$, то всегда $\lim\limits_{x\to 1}\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_nx^n)=Q$. Это следует из $\ln\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_nx^n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_nx^n-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n^2x^{2n}}{(1+\theta_n(x)\,u_nx^n)^2}$. Ниже показано, что для более широкого подкласса сходящихся произведений теорема Абеля не имеет подобного аналога.

Теорема. *Для того чтобы для любого сходящегося произведения* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)=Q$, *для которого* $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|^{2p}<\infty$, $p>1$, $\lim\limits_{x\to 1}\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_nx^{k_n})=Q$, *необходимо* $\left(\text{если } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ *и достаточно* $\left(\text{если } \frac{1}{q}+\frac{1}{2p}=1\right)$, *чтобы*

$$V_n=\frac{k_1^q+k_2^q+\ldots+k_n^q}{k_n^q}<M,\quad M-\text{целое число}. \tag{1}$$

Достаточность. Для x, достаточно близких к единице, мы можем выбрать N так, чтобы $1-\frac{1}{k_N}\leqslant x\leqslant\frac{1}{k_{N+1}}$, $\lim\limits_{N\to\infty}k_N=\infty$. Так как $\lim\limits_{x\to 1}x^{k_n}=1$, то существует последовательность l_N, для которой

$$\lim_{\substack{x\to 1\\(N\to\infty)}}\sum_{n=1}^{l_N}(1-x^{k_n})=0,\quad \lim_{N\to\infty}l_N=\infty,\ l_N\leqslant N. \tag{2}$$

Рассмотрим тождество

$$\frac{1}{\prod_{n=1}^{N}(1+u_n)}\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_nx^{k_n})=$$

$$=\prod_{n=1}^{l_N}\left[1-\frac{(1-x^{k_n})\,u_n}{1+u_n}\right]\prod_{n=l_{N+1}}^{N}\left[1-\frac{(1-x^{k_n})\,u_n}{1+u_n}\right]\prod_{n=N+1}^{\infty}(1+u_nx^{k_n}). \tag{3}$$

В силу неравенства Гельдера и (1)

$$\sum_{n=l_{N+1}}^{N}(1-x^{k_n})|u_n|<\Big[\sum_{n=l_{N+1}}^{N}(1-x)^q(1+\ldots+x^{k_n-1})\Big]^{1/2p}<$$

$$<\Big[\sum_{n=l_{N+1}}^{N}\Big(\frac{k_n}{k_N}\Big)^q\Big]^q r_n(x)\xrightarrow[N\to\infty]{}0. \tag{4}$$

Из (1) следует также, что $\{k_n\}$ не может содержать более M равных членов и $\sqrt[q]{m}\,k_n<k_{n+mM}$ при любом целом $m>1$. Поэтому

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}(x^{k_n})^q<M(x^{qk_{N+1}}+\ldots+x^{qk_{N+2M+1}}+\ldots)<M\sum_{m=0}^{\infty}x^{\sqrt[q]{m}K_{N+1}}<$$

$$<M\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{e}\Big)^{\sqrt[q]{m}}<M\Big[1+\int_0^{\infty}e^{-\sqrt{y}}\,dy\Big]=3M; \tag{5}$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}|x^{k_n}u_n|<\Big[\sum_{k=N+1}^{\infty}(x^{k_n})^q\Big]^{1/q}\Big[\sum_{k=N+1}^{\infty}|u_n|^{2p}\Big]^{1/2p}\xrightarrow[N\to\infty]{}0.$$

Принимая во внимание (2), (4), (5) и неравенство $\Big|\prod_{k=1}^{n}(1+\alpha_k)-1\Big|<$ $<\exp\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|-1$, убеждаемся, что все сомножители правой части (3) стремятся к единице. Следовательно, из (3) следует, что $\lim\limits_{x\to1}\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_nx^{k_n})=Q$.

Необходимость. Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,V_n=\infty$. Тогда $\lim\limits_{x\to1}\sum\limits_{i=0}^{n}\Big(\frac{k_{2i+1}}{k_{2n+1}}\Big)^q=\infty$. Поэтому существуют две последовательности $\{n_\nu\}$ и $\{m_l^\nu\}$, для которых

$$\sum_{i=m_{l-1}^{(\nu)}+1}^{m_l^{(\nu)}}\Big(\frac{k_{2i+1}}{k_{2n_\nu+1}}\Big)^q<\sum_{r=1}^{\nu-1}\sum_{s=n_{r-1}}^{n_r}\Big(\frac{k_{2s+1}}{k_{2n_r+1}}\Big)^q+\sum_{r=n_{\nu-1}}^{m_{l-1}^{(\nu)}}\Big(\frac{k_{2r+1}}{k_{2n_\nu+1}}\Big)^q,$$

$$l=1,2,\ldots,q_\nu;\quad \nu=1,2,\ldots;\quad n_{\nu-1}=m_0^{(\nu)}<m_1^{(\nu)}<\ldots<m_{q_\nu}^{(\nu)}=n_\nu,$$

а q_ν такое, что $(3/2)^{q_\nu}>2^{n_{\nu-1}+\nu}$.

Положим $u_k=-\omega_i$, если $k=2i+1$; $u_k=\dfrac{\omega_i}{1-\omega_i}$, если $k=2i$ $(i=1,2,\ldots)$; $u_1=0$, где ω_i — положительный корень уравнения

$$\frac{\omega_i^2}{1-\omega_i}=\frac{16}{\sigma_i}\Big[\frac{k_{2i+1}}{k_{2n_\nu+1}}\Big]^{q-1},\qquad \sigma_i=\sum_{r=1}^{\nu-1}\sum_{s=n_{r-1}}^{n_r}\Big(\frac{k_{2s+1}}{k_{2n_r+1}}\Big)^q+\sum_{r=n_{\nu-1}+1}^{i}\Big(\frac{k_{2r+1}}{k_{2i+1}}\Big)^q.$$

Положим $x = 1 - \frac{1}{k_{2n_\nu+1}}$. Тогда $1 - x^{k_{2i+1}} > \frac{1}{4}\frac{k_{2i+1}}{k_{2n_\nu+1}}$ и

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n x^{k_n}) = \prod_{i=1}^{\infty}[1 + u_i x^{k_{2i}}][1 + u_{2i+1}x^{k_{2i+1}}] >$$

$$> \prod_{i=1}^{\infty}\left[1 + x^{k_{2i}}(1 - x^{k_{2i+1}})\frac{\omega_i^2}{1-\omega_i}\right] >$$

$$> \prod_{i=1}^{n_{\nu-1}}\left[1 + x^{k_{2i}}(1-x^{k_{2i+1}})\frac{\omega_i^2}{1-\omega_i}\right] \prod_{i=n_{\nu-1}+1}^{n_\nu}\left[1 + \frac{1}{\sigma_i}\left(\frac{k_{2i+1}}{k_{2n_\nu+1}}\right)^q\right] > \left(\frac{1}{2}\right)^{n_{\nu-1}}\left(\frac{3}{2}\right)^{q_\nu} > 2^\nu.$$

Днепропетровский
государственный университет

Поступило
21 I 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Д. Калашников, Укр. матем. журн., 3, № 4 (1951). [2] G. H. Hardy, Proc. London Math. Soc., (2), 7, 40 (1909). [2] M. Schweitzer, Acta Sci. Math., 11, Fasc. 3 (1947).