Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 1

МАТЕМАТИКА

Г. Н. ПОЛОЖИЙ

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ОДНОСВЯЗНЫХ И ДВУХСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ КРИСТОФЕЛЯ — ШВАРЦА ПРИ ПОМОЩИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРИБОРА

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 1 III 1955)

Известный метод электромоделирования конформных отображений, основанный на восстановлении потенциальных линий и линий тока ([1,2]), связан с рядом трудностей и, в частности, не пригоден для случая областей с угловыми точками, так как в угловых точках ортогональность потенциальных линий и линий тока не имеет места. Этим, хотя бы частично, можно объяснить тот факт, что электромоделирование конформных отображений до настоящего времени не получило должного широкого распространения, а определение постоянных Кристофеля—Шварца практически является задачей большой трудности.

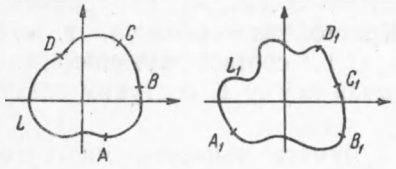


Рис. 1

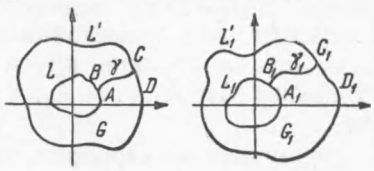


Рис. 2

В настоящей работе дается простой метод отображения односвязных и двухсвязных областей и определения постоянных Кристофеля—Шварца при помощи специального исключительно простого математического прибора.

Лемма 1. *Пусть G и G_1 — произвольные односвязные области, ограниченные жордановыми кривыми L и L_1; A, B, C, D — четыре точки на контуре L; A_1, B_1, C_1, D_1 — четыре точки на контуре L_1 (рис. 1); $w = u + iv$, $w_1 = u_1 + iv_1$ — аналитические функции в областях G и G_1, соответственно, удовлетворяющие следующим краевым условиям:*

$$u|_{AB} = 0, \quad u|_{CD} = a = \text{const} > 0, \quad v|_{BC} = 0, \quad v|_{DA} = h = \text{const} > 0; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u_1|_{A_1B_1} &= 0, \quad u_1|_{C_1D_1} = a = \text{const} > 0, \\ v_1|_{B_1C_1} &= 0, \quad v_1|_{D_1A_1} = h_1 = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда, чтобы при конформном отображении области G на область G_1 четыре точки A, B, C, D переходили, соответственно, в четыре точки A_1, B_1, C_1, D_1, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство $h = h_1$.

Лемма 2. *Пусть G и G_1 — произвольные двухсвязные области; L и L' — жордановы кривые, ограничивающие область G; L_1 и L_1' —*

жордановы кривые, ограничивающие область G_1, причем контур L' охватывает L, а контур L_1' охватывает L_1; B — точка на контуре L; B_1 — точка на L_1 (рис. 2). Пусть $w = u + iv$ и $w_1 = u_1 + iv_1$ — аналитические функции, соответственно, в G и в G_1, удовлетворяющие краевым условиям

$$u|_L = 0, \quad u|_{L'} = a = \text{const} > 0, \tag{3}$$

$$u_1|_{L_1} = 0, \quad u_1|_{L_1'} = a = \text{const} > 0. \tag{4}$$

Тогда, чтобы существовало конформное отображение области G на область G_1, необходимо и достаточно, чтобы приращение вдоль контура L мнимой части функции $w = u + iv$ и приращение вдоль контура L_1 мнимой части функции $w_1 = u_1 + iv_1$ были одинаковыми. Если последнее условие выполнено, то функция, отображающая G на G_1, при условии, что точка B переходит в точку B_1, дает отображение односвязной области G^*, полученной из G при помощи разреза вдоль линии тока γ, соответствующей функции $w = u + iv$ и выходящей из точки B, на односвязную область G_1^*, полученную из G_1 при помощи разреза вдоль линии тока γ_1, соответствующей функции $w_1 = u_1 + iv_1$ и выходящей из точки B_1 (рис. 2).

Доказательство лемм 1 и 2 легко получается при помощи теоремы о движении граничных точек ([3]) или как непосредственное следствие из вариационных теорем теории фильтрации ([4]).

Пусть $\zeta = \zeta(z)$ — функция, отображающая единичный круг $|z| < 1$ на произвольно заданный конечный многоугольник G_1 с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_n$ при условии, что трем вершинам A_1, A_2, A_3 этого многоугольника соответствуют три заданные точки a_1, a_2, a_3 на границе круга $|z| < 1$. Чтобы найти постоянные Кристофеля — Шварца, т. е. точки $a_4, a_5, \ldots, a_n$ на границе круга $|z| < 1$, соответствующие вершинам многоугольника $A_4, A_5, \ldots, A_n$, учитывая лемму 1, поступим следующим образом.

Из однородной электропроводящей бумаги вырежем многоугольник G_1 и, наложив медные зажимы на стороны этого многоугольника A_1A_2 и A_3A_4, замеряем величину сопротивления в образованном таким образом проводнике. Пусть это сопротивление равно R. Теперь вырежем из электропроводящей бумаги единичный круг $|z| < 1$ и, отметив на нем точки a_1, a_2, a_3, наложим медный зажим на дугу a_1a_2, а также на некоторую дугу a_3A единичной окружности с концом в точке a_3. В образованном таким способом проводнике величина сопротивления будет вполне определенной и равной некоторой величине r. Однако, смещая точку A вдоль границы единичного круга и одновременно следя за показаниями измерителя сопротивлений, в соответствии с указанными выше вариационными теоремами ([4]), можно добиться того, чтобы выполнялось равенство $r = R$. При выполнении этого равенства, в соответствии с леммой 1, точка A будет совпадать с точкой a_4 — постоянной Кристофеля — Шварца. Отметив точку a_4 и накладывая теперь медный зажим вместо стороны A_3A_4 на две стороны многоугольника A_3A_1 и A_1A_5, а в остальном поступая точно так же, получим постоянную Кристофеля — Шварца a_5. Продолжая этот процесс, в результате конечного числа операций, определим все постоянные Кристофеля — Шварца. Подставив эти постоянные в известную формулу Кристофеля — Шварца, получим приближенное отображение единичного круга на заданный многоугольник в явном виде без каких-либо неопределенных параметров.

На рис. 3 приведен единичный круг из электропроводящей бумаги с отмеченными предлагаемым методом постоянными Кристофеля — Шварца, соответствующими отображению этого круга на правильный шестиуголь-

ник при условии, что точки $a_1 = 1$, $a_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $a_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ переходят в три соседних вершины шестиугольника.

Теорема 1. *В замкнутом единичном круге* $|z| \leqslant 1$, *отображаемом на многоугольник, приближенное конформное отображение, полученное подстановкой в формулу Кристофеля — Шварца приближенных значений постоянных* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *сколь угодно мало отличается от точного отображения, если погрешность в определении постоянных* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *достаточно мала.*

Доказательство этой теоремы получается непосредственно из рассмотрения формулы Кристофеля — Шварца.

Установленная теорема полезна в том отношении, что указывает на принципиальную возможность получения приближенного конформного отображения единичного круга на многоугольник со сколь угодно малой погрешностью в замкнутом единичном круге, если только погрешность в определении постоянных Кристофеля — Шварца при помощи описанного выше математического прибора достаточно мала.

Пусть требуется найти функцию $\zeta = \zeta(z)$, дающую отображение заданной односвязной области G в плоскости z на заданную односвязную область G_1 в плоскости ζ, причем такую, чтобы три граничных точки A, B, C области G переходили в три граничные точки A_1, B_1, C_1 области G_1 (рис. 1). Чтобы решить эту задачу, отметим на контуре L достаточно густой ряд точек $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и поступая точно так же, как и при определении постоянных Кристофеля — Шварца, т. е. путем сравнения сопротивлений в двух различных проводниках, определим приближенные значения отображающей функции в точках $t_1, t_2, \ldots, t_n$. По этим приближенным значениям без труда можем определить приближенные значения $\tilde{\zeta}(t)$ отображающей функции во всех точках контура L. Подставляя эти приближенные контурные значения в формулу Коши, получим приближенное конформное отображение области G на область G_1 в следующем виде:

$$\tilde{\zeta}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\tilde{\zeta}(t)}{t - z}\,dt. \tag{5}$$

Очевидно, имеет место следующее утверждение:

Теорема 2. *Во всякой замкнутой области* $D + C$, *лежащей внутри односвязной области* G, *отображаемой на односвязную область* G_1, *для разности приближенного конформного отображения* (5) *и точного конформного отображения* $\zeta = \zeta(z)$ *имеет место неравенство*

$$|\zeta(z) - \tilde{\zeta}(z)| < \frac{\delta l}{2\pi\eta}, \tag{6}$$

где δ *— погрешность в определении приближенных контурных значений;* l *— длина контура* L; η *— наименьшее расстояние точек области* D *от контура* L.

Пусть требуется найти конформное отображение $\zeta = \zeta(z)$ двухсвязной области G в плоскости z на двухсвязную область G_1 в плоскости ζ, причем так, чтобы точка B контура L перешла в заданную точку B_1 контура L_1 (рис. 2). Чтобы решить вопрос о существовании такого отображения в соответствии с леммой 2, поступим следующим образом. Наложим медные зажимы на контуры L и L', а также на контуры L_1 и L_1' (рис. 2) и сравним сопротивления в получившихся таким образом двух проводниках. Если при помощи измерительного прибора мы обнаружим, что эти сопротивления различны, то, согласно лемме 2, искомое конформное отображение не существует; если же эти сопротивления одинаковы, то указанное отображение существует. Чтобы в последнем случае

найти отображение в явном виде, не выключая указанные медные зажимы из цепи электрического тока*, из точки B проведем прямолинейный отрезок, перпендикулярный к контуру L, и при помощи гальванометра отметим ряд точек, в которых потенциал будет таким же, как и в концевой точке указанного прямолинейного отрезка. Поступая теперь с концевой точкой построенного прямолинейного отрезка так же, как и с точкой B, построим новый прямолинейный отрезок. Проделав эту операцию конечное число раз, приближенно восстановим линию тока γ (рис. 2). Так же приближенно можно восстановить линию тока γ_1 (рис. 2). Разрезав теперь область G вдоль γ, а область G_1 вдоль γ_1 и поступая точно так же, как и при отображении односвязных областей, восстановим приближенные контурные значения отображающей функции $\zeta = \zeta(z)$ на границе двухсвязной области G. Подставляя эти приближенные контурные значения $\tilde{\zeta}(t)$ в формулу Коши, получим приближенное конформное отображение двухсвязной области G на двухсвязную область G_1 в следующем виде:

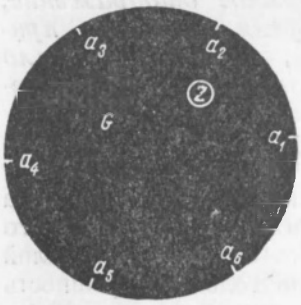


Рис. 3

$$\tilde{\zeta}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L'} \frac{\tilde{\zeta}(t)}{t-z}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int_{L} \frac{\tilde{\zeta}(t)}{t-z}\,dt. \qquad (7)$$

Очевидно, что для оценки погрешности в этом случае будет иметь место неравенство, совершенно аналогичное неравенству (6), с той лишь разницей, что здесь под величиной l следует понимать сумму длин контуров L и L'.

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
24 II 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] K. N. Bradfield, S. G. Hooker, R. V. Southwell, Proc. Roy. Soc., A 159, No. 898, 315 (1937). [2] Ю. Г. Толстов, Изв. АН СССР, ОТН, № 7—8, 447 (1944). [3] Г. Н. Положий, Усп. матем. наук, 7, в. 6, 203 (1952). [4] Г. Н. Положий, Украинск. матем. журн., 5, № 4, 380 (1952).

* В этом месте существенно, чтобы электрический ток в цепи был постоянным.