Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 1

МАТЕМАТИКА

Л. Д. КУДРЯВЦЕВ

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 23 V 1955)

В настоящей заметке мы устанавливаем ряд свойств дифференцируемых отображений областей G n-мерного евклидова пространства E^n, в частности, переносим классическую теорему единственности из теории функций комплексного переменного на более общий класс отображений.

Теорема 1. *Пусть f — непрерывно дифференцируемое отображение области $G \subseteq E_x^n$ в E_y^n и множество нулей якобиана отображения f изолировано. Тогда не существует последовательности точек $x_n \in G$, имеющей в G предельную точку и такой, что $f(x_n) = f(x_m)$ для всех $n, m = 1, 2, \ldots$*

Пример. Рассмотрим эллиптическую систему уравнений

$$au_x + bu_y - v_y = 0, \quad du_x + cu_y + v_x = 0, \quad ac > (b+d)^2/4,$$

где a, b, c и d — функции переменных x и y, имеющие производные, удовлетворяющие условию Гельдера. Как показал Г. Н. Положий (1), множество нулей якобиана отображения $f(z) = u + iv$, где $z = x + iy$, а u и v — непрерывно дифференцируемые решения рассматриваемой системы, отличные от постоянных, есть изолированное множество. Отсюда в силу однородности системы из нашей теоремы следует, что если два указанных решения этой системы совпадают на некоторой последовательности точек, имеющей предельную точку внутри области их определения, то они совпадают тождественно во всей области.

Ограниченную область $\Gamma \subseteq E^n$ будем называть регулярной, если ее граница Γ_g состоит из конечного числа попарно не пересекающихся замкнутых топологических $(n-1)$-мерных псевдомногообразий. Через z_Γ будем обозначать положительную ориентацию границы Γ_g, рассматриваемой как истинный цикл. В доказательстве теоремы 1 используется элементарная лемма, состоящая в том, что если у положительно ориентированного (2) непрерывного отображения замкнутой регулярной области $\overline{\Gamma} \subset E_x^n$ в E_y^n множество точек $x \in \Gamma$, в которых степень отображения f равна нулю: $\gamma_f(x) = 0$, есть изолированное множество, то оно пусто и для всякой точки $y_0 \in f(\Gamma) \setminus f(\Gamma_g)$ имеет место $\mathfrak{v}[f(z_\Gamma), y_0] > 0$.

Для ориентированных непрерывных отображений, у которых множество $\mathop{\mathcal{E}}_x \{\gamma_f(x) = 0\}$ пусто (к таким отображениям относятся, например, дифференцируемые отображения с изолированными нулями якобиана), полностью сохраняется принцип аргумента. Именно, пусть указанное отображение f определено на замкнутой регулярной области Γ, кроме, быть может, конечного числа полюсов; тогда $N(y_0) - P = \mathfrak{v}[f(z_\Gamma), y_0]$, где P — число полюсов, а $N(y_0)$ — число прообразов точки $y_0 \in f(\overline{\Gamma}) \setminus f(\Gamma_g)$, причем каждый из тех и других считается столько раз, какова его крат-

ность. Отсюда следует, что для указанных отображений автоматически справедливы все следствия из принципа аргумента, например, теоремы Руше, Гурвица, принцип соответствия границ и др. Поскольку при $n > 2$ непрерывное отображение уже не может иметь изолированных точек кручения, то полезно обобщение принципа аргумента на случай произвольного непрерывного компактного отображения, определенного из замкнутой регулярной области $\bar{\Gamma}$, кроме, быть может, компакта $F \subset \Gamma$, являющегося «обобщенным полюсом». В этом случае для любого $y_0 \in f(\Gamma \setminus F) \setminus f(\Gamma_g)$ имеет место: $B(y_0) - P(F) = \mathfrak{v}[f(z_\Gamma), y_0]$, где $B(y_0)$ — брауеровская степень отображения f в точке y_0, а $P(F)$ — порядок полюса F, определяемый естественным образом при помощи циклов, окаймляющих компакт F.

Заметим, что для непрерывного ориентированного отображения f замкнутой ограниченной области $G \subseteq E_x^n$ в E_y^n, у которого $\operatorname{mes}_x f\{\mathcal{C}[|\gamma(x)| \neq 1]\} = 0$, имеет место формула $B(y_0) = \pm \frac{1}{\operatorname{mes}\Gamma_y \Gamma_x} \operatorname{V}_{\Gamma_x} f$, где $\operatorname{V}_{\Gamma_x} f$ — вариация отображения f на $\Gamma_x = f^{-1}(\Gamma_y)$ ([3]), а $\Gamma_y = \operatorname{comp}_{y_0}[E_y^n \setminus f(G_g)]$.

Впервые свойства дифференцируемых (и даже более общих) отображений в случае $n = 2$, связанные в той или иной степени с принципом аргумента, были изучены в ([4, 5]); дальнейшие исследования для случая произвольного n можно найти, например, в ([2, 6–10])*.

Напомним, что отображение f называется монотонным (соответственно, компактным), если прообраз каждой точки есть континуум (соответственно, компакт). Компактное отображение f области $G \subseteq E_x^n$ в E_y^n назовем локально монотонным в точке $y_0 \in f(G)$, если для любой $\operatorname{comp} f^{-1}(y_0) = X$ существует окрестность Γ этой компоненты $X \subset \Gamma \subseteq G$, на которой f монотонно. Отображение f, локально монотонное в каждой точке $y \in f(G)$, назовем просто локально монотонным. Имеет место следующее обобщение теоремы Адамара:

Теорема 2. *Пусть f — локально монотонное дифференцируемое ориентированное отображение ограниченной односвязной области $G \subseteq E^n$ на односвязную же область, причем граница образа есть образ границы, и пусть множество нулей якобиана этого отображения не имеет внутренних точек. Тогда f есть просто монотонное отображение.*

Следствие. Пусть f есть локально монотонное дифференцируемое отображение сферы S_x^n на сферу S_y^n и множество нулей якобиана этого отображения не имеет внутренних точек. Тогда f есть просто монотонное отображение.

Основной при доказательстве является следующая лемма.

Лемма. *Пусть G — односвязная ограниченная область, f — компактное ориентированное дифференцируемое отображение, множество нулей якобиана которого не имеет внутренних точек, причем граница образа есть образ границы, и пусть $\varphi(t)$, $0 \leqslant t < 1$, — путь в G. Пусть $\Phi(t, \theta)$ — непрерывная деформация пути $f\varphi(t)$, $0 \leqslant t$, $\theta \leqslant 1$, такая, что $\Phi(t, 0) = f\varphi(t)$, $\Phi(0, \theta) = f\varphi(0)$, $\Phi(1, \theta) = f\varphi(1)$ и каждая точка компакта $F = \mathcal{C}_y\{y = \Phi(t, \theta)$, $0 \leqslant t$, $\theta \leqslant 1\}$ есть точка локальной монотонности. Тогда для любого $\delta > 0$ существует деформация $\varphi(t, \theta)$ пути $\varphi(t)$ такая, что $\rho[fy(t, 1), \Phi(t, 1)] < \delta$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.*

---

* Пользуясь случаем, отметим, что в заметке автора ([10]) допущена некоторая неточность: в следствиях теорем 1° и 2°, а также в теоремах 3° и 4° пропущено условие ограниченности области G. Заметим также, что теоремы 1° и 4° из ([10]) справедливы и в случае, когда G_0 нульмерно.

Отметим также, что для дифференцируемого компактного ориентированного отображения f, у которого множество нулей якобиана не имеет внутренних точек, число компонент в полном прообразе любой точки конечно, а если вместо компактности потребовать монотонность, то имеет место принцип обратного сохранения области: прообраз области есть область. Все это естественным образом обобщается на соответствующий класс непрерывных отображений.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
19 V 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Н. Положий, Матем. сборн., 32(74): 3, 485 (1953). [2] Л. Д. Кудрявцев, Матем. сборн., 32(74): 3, 493 (1953). [3] Л. Д. Кудрявцев, Усп. матем. наук, 8, № 2 (54), 164 (1953). [4] S. Stoilow, Fund. Math., 13, 186 (1929). [5] K. Szilard, Math. Zs., 26, 653 (1928). [6] А. М. Роднянский, ДАН, 72, № 1, 15 (1950). [7] А. М. Роднянский, ДАН, 91, № 5, 1019 (1953). [8] C. J. Titus, G. S. Yong, Michigan Math. J., 1, No. 1, 89 (1952). [9] Л. Д. Кудрявцев, Матем. сборн., 33(75): 2, 389 (1953). [10] Л. Д. Кудрявцев, ДАН, 95, № 5, 921 (1954).