Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 1

МАТЕМАТИКА

И. Ц. ГОХБЕРГ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА НОРМАЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 19 V 1955)

Пусть A — линейный ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве E. Через $R(A)$ будем обозначать образ оператора A, через $L(A)$ — подпространство решений уравнения $Ax = 0$. Пусть $\alpha(A)$ обозначает размерность подпространства $L(A)$ и $\beta(A)$ — размерность фактор-пространства $E/\overline{R(A)}$.

В работах С. Н. Крачковского ([1,2]) показано, что если A — нормально разрешимый оператор и числа $\alpha(A)$, $\beta(A)$ конечны, то существует такое целое число n_0, что разность $\alpha(A^{n+1}) \ominus \alpha(A^n)$ равна одному и тому же числу m для всех целых $n > n_0$. В этом случае доказано существование числа $\rho > 0$ такого, что для всех комплексных чисел λ, отличных от нуля, $|\lambda| < \rho$, имеют место следующие два свойства: уравнение $(A - \lambda I)x = 0$ имеет точно m линейно независимых решений для u всех целых положительных r

$$\alpha((A - \lambda I)^{r+1}) - \alpha((A - \lambda I)^r) = m.$$

В нашей заметке ([4]) показано, что указанные выше результаты справедливы и в случае, когда A — неограниченный замкнутый линейный оператор, действующий в E, и также для случая, когда E — гильбертово пространство и только $\alpha(A)$ конечно *.

В настоящей заметке при помощи метода из ([4]) для случая, когда E — гильбертово пространство, показывается, что требование конечности чисел $\alpha(A)$ и $\beta(A)$ несущественно, что перечисленные выше результаты сохраняют свою силу и при следующих ограничениях: (α) существует целое положительное число n_0, для которого подпространство $L(A^{n_0+1}) \ominus L(A^{n_0})$ имеет конечную размерность; (β) операторы A^i, $i = 1, 2, \ldots, n_0 + 1$, нормально разрешимы (очевидно, что оба эти условия выполняются в случае конечности числа $\alpha(A)$ и нормальной разрешимости оператора A).

Пусть в дальнейшем A — линейный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Для дальнейшего необходима следующая лемма:

Лемма. *Пусть A — нормально разрешимый оператор и R — некоторое подпространство H. Тогда линейные многообразия $A(R)$ и $R_1 + L(A)$, где $R_1 = R \ominus (L(A) \cap R)$ одновременно замкнуты.*

Эту лемму можно сформулировать и следующим образом:

Для того чтобы $A(R)$ было подпространством, необходимо и достаточно, чтобы минимальный угол между подпространствами R_1 и $L(A)$ был положителен ([3]).

* В заметке ([5]) С. Н. Крачковский обобщил перечисленные выше результаты и для случая, когда E — банахово пространство, A — ограниченный оператор и только $\alpha(A)$ конечно.

Следствие 1. *Если подпространство $L(A)$ конечномерно, то, каково бы ни было подпространство $R \subset H$, $A(R)$ является подпространством.* (Это следствие содержится в лемме из ([4]).)

Следствие 2. *Если линейный ограниченный оператор A обладает свойствами (α) и (β), то все итерации A^i, $i = 1, 2, \ldots$, оператора A являются нормально разрешимыми.*

Пусть далее A обладает свойствами (α) и (β). Из условий (α), (β) и леммы 1 следует существование такого целого положительного числа k, что для всех $n \geqslant k$ $L(A^{n+1}) \ominus L(A^n)$ имеет одну и ту же конечную размерность; обозначим ее через m.

Теорема. *Пусть линейный ограниченный оператор A действует в пространстве Гильберта H и обладает перечисленными выше свойствами (α) и (β). Тогда существует такое положительное число ρ, что для всех комплексных чисел λ, $\lambda \neq 0$, $|\lambda| < \rho$, оператор $A - \lambda I$ нормально разрешим, уравнение $(A - \lambda I)x = 0$ имеет ровно m линейно независимых решений и для всех целых $n > 0$ $\alpha((A - \lambda I)^{n+1}) - \alpha((A - \lambda I)^n) = m$.*

Доказательство. Можно построить подпространства $\mathfrak{N}$ и R, обладающие следующими свойствами: $\mathfrak{N} \cap R = 0$; $\mathfrak{N} + R = H$; $A^k\mathfrak{N} = 0$; $A\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}$; $AR \subseteq R$; в подпространстве R уравнение $A\varphi = 0$ имеет ровно m линейно независимых решений и $A^p\varphi = 0$ имеет pm линейно независимых решений.

Обозначим через A_1 часть оператора A, индуцированную подпространством R. A_1 является нормально разрешимым оператором, уравнение $A_1x = 0$ имеет ровно m линейно независимых решений, обозначим их через $\varphi_{11}, \varphi_{21}, \ldots, \varphi_{m1}$. Все линейно независимые нульэлементы A можно записать в виде m бесконечных строк $\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \ldots, \varphi_{ij}, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots, m$, для которых имеют место равенства $A_1\varphi_{i\,j+1} = \varphi_{ij}$. Подпространство R можно разложить в прямую сумму $R = L(A_1) + R_0$, где R_0 — подпространство, содержащее все нульэлементы φ_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots$ Оператор A_1, как оператор, действующий из R_0 в R, имеет ограниченный обратный слева A_1^{-1}. Пусть $\rho_1 = \| A_1^{-1} \|$, тогда $\| \varphi_{ij} \| = \| A\varphi_{i\,j+1} \| \leqslant \frac{1}{\rho_1} \| \varphi_{i\,j+1} \|$ или $\| \varphi_{i\,j+1} \| \leqslant \rho_1^j \| \varphi_{i1} \|$. Пусть $\rho = \frac{1}{\rho_1}$. Отсюда следует, что ряды $\psi_i = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \varphi_{i\,j+1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, сходятся для всех λ, модуль которых меньше ρ. Обозначим через σ_0 множество комплексных чисел λ, для которых $|\lambda| < \rho$.

Для всех $\lambda \in \sigma_0$ элементы $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ линейно независимы и являются решениями уравнения $(A_1 - \lambda I)\varphi = 0$ ([1]). Кроме этого для всех $\lambda \in \sigma_0$ (см. теорему 4 из ([4])) оператор $A_1 - \lambda I$ нормально разрешим и $\alpha(A_1 - \lambda I) \leqslant \alpha(A_1) = m$. Следовательно для всех $\lambda \in \sigma_0$ уравнение $(A_1 - \lambda I)\varphi = 0$ имеет ровно m линейно независимых решений; для всех целых положительных n $\alpha((A_1 - \lambda I)^{n+1}) - \alpha((A_1 - \lambda I)^n) = m$. Через A_2 обозначим часть оператора A, индуцированную подпространством $\mathfrak{N}$. Оператор $A_2 - \lambda I$ имеет ограниченный обратный для всех $\lambda \neq 0$. В самом деле, $A_2^k = 0$, следовательно, $(A_2 - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda^k}(A_2^{k-1} + \lambda A_2^{k-2} + \ldots + \lambda^{k-2}A_2 + \lambda^{k-1}I)$. Из приведенных рассуждений непосредственно следует справедливость доказанной теоремы.

Следствие. *Если для линейного ограниченного оператора A существует такое целое положительное число k, что $L(A^k) = L(A^{k+1})$ и A^i, $i = 1, 2, \ldots, k+1$, нормально разрешимы, то существует такое $\rho > 0$, что для всех λ с модулем, меньшим ρ, оператор $A - \lambda I$ имеет ограниченный обратный слева.*

Резольвента слева оператора A в этом случае в окрестности $\lambda = 0$ имеет вид:

$$R_\lambda = -\frac{1}{\lambda^k} A_2^{k-1} - \frac{1}{\lambda^{k-1}} A_2^{k-1} - \frac{1}{\lambda} A_2 - \frac{I^2}{\lambda} + A_1^{-1} + \lambda_2 A_1^{-2} + \ldots,$$

где A определен на $\mathfrak{N}$ равенством $A_2\varphi$, A_1^{-1} является обратным слева к A_1 на R и обращается в нуль на всех векторах подпространства $\mathfrak{N}$. Оператор I_2 равен тождественному на $\mathfrak{N}$ и обращается в нуль на всех элементах R.

Обозначим через $K(A)$ множество всех комплексных чисел λ, для каждого из которых существует такое целое положительное число k, что подпространство $L((A-\lambda I)^{k+1}) \ominus L((A-\lambda I)^k)$ имеет конечную размерность и операторы $(A-\lambda I)^i$, $i = 1, 2, \ldots, k+1$, нормально разрешимы. Из доказанной выше теоремы получается, что $K(A)$ является открытым множеством. Следовательно, $K(A)$ представляет собой сумму конечного или счетного числа связных компонент. Пусть K — некоторая связная компонента $K(A)$. Уравнение $(A-\lambda I)\varphi = 0$ имеет для всех $\lambda \in K$, за исключением, может быть, изолированного множества P, одно и то же конечное число линейно независимых решений (пусть оно равно m). Для всех $\lambda \in K - P$ и целых положительных n размерность подпространства $L((A-\lambda I)^{n+1}) \ominus L((A-\lambda I)^n)$ равна m.

Для каждого $\lambda \in P$ уравнение $(A-\lambda I)\varphi = 0$ имеет более m линейно независимых решений и существует число $n_0 = n_0(\lambda)$ такое, что для всех целых $n > n_0$ подпространство $L((A-\lambda I)^{n+1}) \ominus L((A-\lambda I)^n)$ имеет размерность, равную m.

В заключение заметим, что точки $\lambda \in K(A)$, в которых размерность $\alpha(A-\lambda I)$ бесконечна, являются изолированными точками.

Автор выражает благодарность С. М. Никольскому за советы при окончательном редактировании работы.

Бельцкий государственный
педагогический институт

Поступило
18 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Крачковский, ДАН, 88, № 2 (1953). [2] С. Н. Крачковский, ДАН, 91, № 5 (1953). [3] М. Г. Крейн, М. А. Красносельский, Д. П. Мильман, Сборн. тр. Инст. матем. АН УССР, № 11 (1948). [4] И. Ц. Гохберг, ДАН, 101, № 1 (1955). [5] С. Н. Крачковский, ДАН, 96, № 6 (1954).