Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 1

МАТЕМАТИКА

З. И. БОРЕВИЧ

К ТЕОРИИ ГОМОЛОГИЙ В ГРУППАХ С ОПЕРАТОРАМИ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 19 V 1955)

Если группа G является группой (левых) операторов для абелевой группы A, то A называется G-модулем. Для двух G-модулей Ω и A группа Hom (Ω, A) всех гомоморфизмов Ω в A и тензорное произведение $A \otimes \Omega$ также являются G-модулями, в которых операторы $\sigma \in G$ действуют по формулам:

$$(\sigma h)(x) = \sigma h(\sigma^{-1}x), \quad h \in \mathrm{Hom}(\Omega, A), \quad x \in \Omega;$$
$$\sigma(a, x) = (\sigma a, \sigma x), \quad a \in A, \ x \in \Omega.$$

Группа операторных гомоморфизмов h группы Ω в A (для которых $\sigma h = h$) обозначается через $G - \mathrm{Hom}(\Omega, A)$; $A \circ \Omega$ обозначает факторгруппу группы $A \otimes \Omega$ по подгруппе, порожденной элементами вида $\sigma z - z$, $\sigma \in G$, $z \in A \otimes \Omega$. G-модуль Φ называется свободным, если в Φ существуют элементы $(v_\alpha)_\alpha$ такие, что элементы $(\sigma v_\alpha)_{\alpha, \sigma \in G}$ образуют свободный базис свободной абелевой группы Φ. Каждый свободный G-модуль есть прямая сумма $\sum_\alpha O_\alpha$, где O_α операторно изоморфны аддитивной группе целочисленного группового кольца O группы G. J обозначает группу целых чисел по сложению с тождественными операторами из G.

Точная гомоморфная последовательность

$$(0) \longleftarrow J \xleftarrow{\mu} \Phi_0 \xleftarrow{\partial} \Phi_1 \xleftarrow{\partial_1} \cdots \xleftarrow{\partial_n} \Phi_n \xleftarrow{\partial} \cdots \qquad (1)$$

называется фундаментальным комплексом группы G, если группы Φ_n, $n \geqslant 0$, являются свободными G-модулями, а гомоморфизмы $\partial = \partial_n$: $\Phi_n \to \Phi_{n-1}$, $n \geqslant 1$, и μ: $\Phi_0 \to J$ являются операторными гомоморфизмами. «Точность» здесь означает, что ядро каждого из гомоморфизмов последовательности совпадает с образом при последующем гомоморфизме. Легко видеть, что фундаментальные комплексы для произвольной группы G существуют. В качестве Φ_0 всегда можно взять 0 (в этом случае $\mu(\sigma) = 1$, $\sigma \in G$).

Предположим, что группа G конечна. В этом случае фундаментальный комплекс (1) можно выбрать так, чтобы все группы Φ_n, $n \geqslant 0$, имели конечное число образующих. Для $n \geqslant 1$ положим

$$\Phi_{-n} = \mathrm{Hom}(\Phi_{n-1}, J).$$

Так как G-модули 0 и Hom $(0, J)$ операторно изоморфны, то Φ_{-n} является также свободным G-модулем.

Определяем гомоморфизмы ∂_0: $\Phi_0 \to \Phi_{-1}$, ∂_{-n}: $\Phi_{-n} \to \Phi_{-n-1}$, $n \geqslant 1$, следующим образом

$$(\partial_0 x)(y) = \mu(x)\mu(y), \quad x \in \Phi_0, \ y \in \Phi_0;$$
$$(\partial_{-n} h)(y) = h(\partial_n y), \quad h \in \Phi_{-n}, \ y \in \Phi_n.$$

Получаем бесконечную в обе стороны точную гомоморфную последовательность

$$\cdots \xleftarrow{\partial} \Phi_{-1} \xleftarrow{\partial} \Phi_0 \xleftarrow{\partial} \Phi_1 \xleftarrow{\partial} \cdots,$$

которую назовем полным фундаментальным комплексом конечной группы G.

Для любого целого n, если G конечна, и для $n \geqslant 0$, если G бесконечна, положим

$$C^n = G - \mathrm{Hom}(\Phi_n, A), \quad C_n = A \circ \Phi_n.$$

Гомоморфизмы $\delta\colon C^n \to C^{n+1}$ и $\partial\colon C_n \to C_{n-1}$ определяются равенствами

$$(\delta h)(x) = h(\partial x), \quad h \in C^n, \ x \in \Phi_{n+1};$$

$$\partial(a, x) = (a, \partial x), \quad a \in A, \ x \in \Phi_n.$$

Таким образом, для произвольной группы G получаем цепные комплексы

$$C^0 \xrightarrow{\delta} C^1 \xrightarrow{\delta} \cdots; \quad C_0 \xleftarrow{\partial} C_1 \xleftarrow{\partial} \cdots$$

Если же G конечна, то получаем бесконечные в обе стороны цепные комплексы

$$\cdots \xrightarrow{\delta} C^{-1} \xrightarrow{\delta} C^0 \xrightarrow{\delta} C^1 \xrightarrow{\delta} \cdots; \quad \cdots \xleftarrow{\partial} C_{-1} \xleftarrow{\partial} C_0 \xleftarrow{\partial} C_1 \xleftarrow{\partial} \cdots$$

Оказывается, что группы гомологий этих цепных комплексов не зависят от выбора фундаментального комплекса (1), а зависят лишь от группы G и G-модуля A. Обозначим их через H^n и H_n, соответственно ($n \geqslant 1$, если G бесконечна). Как известно ([2]), если $n \geqslant 1$, то для произвольной группы G имеют место естественные изоморфизмы

$$H^n \cong H^n(G, A); \quad H_n \cong H_n(G, A). \tag{2}$$

В случае конечной группы G изоморфизмы (2) могут служить определением групп $H^n(G, A)$ и $H_n(G, A)$ для $n \leqslant 0$ (о возможности введения этих групп упоминается в ([3])).

Теорема 1. *Для конечной группы G при любом целом n имеет место изоморфизм*

$$H_n(G, A) \cong H^{-n-1}(G, A).$$

Теорема 2. *Полагая $\Omega_n = \partial \Phi_n$, имеем изоморфизм*

$$H^n(G, A) \cong G - \mathrm{Hom}(\Omega_n, A)/G - \mathrm{Hom}(\Phi_{n-1}, A)|_{\Omega_n},$$

где n произвольно, если G конечна, и $n \geqslant 1$, если G бесконечна.

Доказательство. Пусть $f \in C^n$ и $\delta f = 0$. Для $x \in \Phi_n$ положим $\overline{f}(\partial x) = f(x)$. Отображение $f \to \overline{f}$ есть изоморфизм группы n-мерных циклов на $G - \mathrm{Hom}(\Omega_n, A)$, при котором группа границ отображается на $G - \mathrm{Hom}(\Phi_{n-1}, A)|_{\Omega_n}$.

Для конечной группы G отображение $h \to \sum_{\sigma \in G} \sigma h$, $h \in \mathrm{Hom}(\Omega_n, A)$, есть гомоморфизм в группу $G - \mathrm{Hom}(\Omega_n, A)$. Обозначим через $\overline{\mathrm{Hom}(\Omega_n, A)}$ образ группы $\mathrm{Hom}(\Omega_n, A)$ при этом гомоморфизме.

Теорема 3. *Если G конечна, то при любом n*

$$H^n(G, A) \cong G - \mathrm{Hom}(\Omega_n, A)/\overline{\mathrm{Hom}(\Omega_n, A)}.$$

Доказательство. В силу теоремы 2 достаточно заметить, что каждый гомоморфизм $h \in G - \mathrm{Hom}(\Phi_{n-1}, A)$ представим в виде $h = \sum_{\sigma \in G} \sigma l$, где $l \in \mathrm{Hom}(\Phi_{n-1}, A)$.

При помощи теоремы 3 могут быть даны простые доказательства многих известных теорем. Например, если $m = \mathrm{ord}\, G$, то для $f \in G - \mathrm{Hom}(\Omega_n, A)$ имеем $mf = \sum_{\sigma \in G} \sigma f \in \overline{\mathrm{Hom}(\Omega_n, A)}$, т. е. порядок любого элемента $H^n(G, A)$ (при любом n) есть делитель m.

Теорема 4. *Если W есть свободный G-модуль, то*

$$H^n(G, \mathrm{Hom}(W, A)) = (0); \quad H_n(G, A \otimes W) = (0),$$

где n любое, если G конечна, и $n \geqslant 1$, если G бесконечна.

Относительно случая $n \geqslant 1$ см. ([4]).

Теорема 5. *Если—G конечная группа, то при любых n и k имеют место изоморфизмы*

$$H^{n+k}(G, A) \cong H^n(G, \mathrm{Hom}(\Omega_k, A));$$
$$H_{n+k}(G, A) \cong H_n(G, A \otimes \Omega_k).$$

Если G бесконечная группа, то эти изоморфизмы имеют место при $n \geqslant 1$, $k \geqslant 0$.

Доказательство. Группа гомоморфизмов $h \in \mathrm{Hom}(\Phi_{k-1}, A)$, аннулирующих Ω_k, естественным образом отождествляется с группой $\mathrm{Hom}(\Omega_{k-1}, A)$, поэтому имеем операторный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(\Phi_{k-1}, A)/\mathrm{Hom}(\Omega_{k-1}, A) \cong \mathrm{Hom}(\Omega_k, A).$$

В силу теоремы 4 и ([5]) (теорема 4) получаем

$$H^n(G, \mathrm{Hom}(\Omega_k, A)) \cong H^{n+1}(G, \mathrm{Hom}(\Omega_{k-1}, A)),$$

откуда и вытекает первый изоморфизм теоремы, ибо $\mathrm{Hom}(\Omega_0, A) \cong A$. Второй изоморфизм доказывается аналогично.

Так как Ω_2 (при надлежащем выборе фундаментального комплекса) операторно изоморфна R_0 (см. ([6])), то при $k = 2$ теорема 5 дает редукционную теорему Эйленберга и Маклейна ([7]): $H^{n+2}(G, A) \cong H^n(G, \mathrm{Hom}(R_0, A))$ (которая остается справедливой при любом n, если G конечна). В силу теоремы 1 для конечной G имеем изоморфизмы

$$H_n(G, A) \cong H_{n+k}(G, \mathrm{Hom}(\Omega_k, A)),$$
$$H^n(G, A) \cong H^{n+k}(G, A \otimes \Omega_k),$$

которые при $k < 0$ имеют характер редукционных теорем. (Заметим, что Ω_{-k} операторно изоморфна $\mathrm{Hom}(\Omega_k, J)$.) Полагая в последнем изоморфизме $A = J$, $k = 2$, получаем ([8]): $H^n(G, R_0) \cong H^{n-2}(G, J)$ (при любом n).

Обозначим через $H^2_a(A_0, A)$ группу абелевых расширений A при помощи абелевой группы A_0 (см. ([9]), § 52).

Теорема 6. *Если G является группой тождественных операторов для A, то*

$$H^n(G, A) \cong \mathrm{Hom}(H_n(G, J), A) \oplus H_a^2(H_{n-1}(G, J), A),$$

$$H_n(G, A) \cong [A \otimes H_n(G, J)] \oplus [A * H_{n-1}(G, J)]$$

при произвольном n, если G конечна, и $n \geqslant 1$, если G бесконечна (в последнем случае при $n = 1$ надо считать $H_0(G, J) = (0)$). Знак $*$ обозначает произведение кручения ([10]).

В силу теоремы 1 для конечной группы G получаем изоморфизмы

$$H_n(G, A) \cong \mathrm{Hom}(H^n(G, J), A) \oplus H_a^2(H^{n+1}(G, J), A);$$

$$H^n(G, A) \cong [A \otimes H^n(G, J)] \oplus [A * H^{n+1}(G, J)].$$

Случай $n \geqslant 1$ теоремы 6 содержится в ([11]).

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
18 V 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. L. Kelley, E. Pitcher, Ann. of Math., 48, № 3 (1947). [2] S. Eilenberg, S. MacLane, Trans. Am. Math. Soc., 65, № 1 (1949) [3] J. Tate, Ann. of Math., 56, № 2 (1952). [4] R. G. Lyndon, Ann. of Math., 52, № 3 (1950). [5] Д. К. Фаддеев, ДАН, 58, № 3 (1947). [6] З. И. Боревич, ДАН, 91, № 2 (1953). [7] S. Eilenberg, S. MacLane, Ann. of Math., 48, № 1 (1947). [8] З. И. Боревич, Изв. АН СССР, сер. матем., 16, № 4 (1952). [9] А. Г. Курош, Теория групп, 1953. [10] J.-P. Serre, Ann. of Math., 58, № 2 (1953). [11] S. Eilenberg, Bull. Am. Math. Soc., 55, No. 1 (1949).