Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 3

МАТЕМАТИКА

Г. М. ГИНЗБУРГ

О ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ СТОХАСТИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ С БЕСКОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ НУЛЕЙ ДИСПЕРСИОННОЙ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 2 II 1955)

В работе (1) С. Н. Бернштейн установил, что уравнение

$$\Delta y_i = A(y_i)\,\Delta t_i + f(\alpha,\ y_i)\sqrt{\Delta t_i},\quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;\quad \sum_{0}^{n-1}\Delta t_i = t, \tag{1}$$

определяет предельное распределение для $t \to \infty$

$$P(y) = \lim_{t\to\infty}\,[\lim_{n\to\infty} P_n(y,\ t)],$$

удовлетворяющее уравнению

$$(A'P)^{(-2)} - [(A + {}^1/_2B')\,P]^{(-1)} + {}^1/_2PB = ay + b, \tag{2}$$

если функции $A(y)$ и $B(y) = Ef^2(\alpha,\ y)$ таковы, что для любого сколь угодно большого t имеет место неравенство $E|y_n|^\lambda \leqslant L$.

Если, кроме того, $B(y) < 0$, то предельное распределение единственно и определяется формулой

$$\frac{dP}{dy} = p(y) = \frac{C}{B(y)}\,e^{2\int\frac{A}{B}\,dy}, \tag{3}$$

где C — константа нормирования.

Для выполнения условия $E|y_n|^\lambda \leqslant L$, как показано в этой же работе, достаточно, чтобы $|f'_y(\alpha,\ y)| < a$ и

$$yA(y) < -\varepsilon(1 + y^2) + H(1 + y^2)^{{}^3/_4}, \tag{4}$$

где ε и H — положительные постоянные.

В работе (2) нами установлены условия единственности предельного распределения для случая, когда дисперсионная функция $B(y)$ обращается в нуль на некотором множестве точек. Основными результатами являются:

I. Теорема единственности непрерывного предельного распределения. *Если функции $A(y)$ и $B(y)$ — аналитические функции от y, не имеющие общих нулей, то предельное распределение $P(y)$, определяемое уравнением* (1), *единственно в том и только в том случае, если нули функции $B(y)$, в которых $A(y) < 0$,*

не предшествуют на числовой оси нулям функции $B(y)$, *в которых* $A(y) > 0$.

II. Теорема единственности дискретного предельного распределения. *Если* $A(y)$ *и* $B(y)$ — *аналитические функции от* y, *имеющие один общий нуль* $y = y_s$, *то предельное распределение* $P(y)$, *определяемое уравнением* (1), *единственно и* $dP(y_s) = 1$ *в том и только в том случае, если при*

$$A(y) = (y - y_s)^m \varphi(y), \quad \varphi(y_s) = a \neq 0,$$

$$B(y) = (y - y_s)^{2k} \psi(y), \quad \psi(y_s) = b > 0$$

выполняются условия:

1) *функция* $A(y)$ *положительна в нулях функции* $B(y)$, *лежащих слева от* y_s, *и отрицательна в нулях функции* $B(y)$, *лежащих справа от* y_s;

2) a) $m \geqslant 2k$

или

b) $m = 2k - 1$ *и* $a \leqslant b(k - {}^1/_2)$

или

c) $m < 2k - 1$, m *нечетно и* $a < 0$.

Доказательства приведенных теорем и примеры соответствующих стохастических уравнений даны для случая, когда функция $B(y)$ обращается в нуль в конечном множестве точек.

Достаточность условий, указанных в приведенных теоремах для единственности предельных распределений, распространяется без оговорок (что вытекает из лемм 1 и 6 ([2])) и на случай, когда дисперсионная функция $B(y)$ имеет бесконечное множество нулей; при этом лемма 1 и условие $\int_{-\infty}^{\infty} p(y)\,dy = 1$ показывают, что, в отличие от случая, когда функция $B(y)$ имеет конечное множество нулей, функция $A(y)$ не может принимать во всех нулях функции $B(y)$ только положительные или только отрицательные значения, если функция $B(y)$ имеет бесконечное множество нулей в обоих направлениях оси Oy. Если же, например, функция $B(y)$ имеет бесконечное множество нулей только в положительном направлении оси Oy, то функция $A(y)$ не может принимать положительных значений во всех нулях функции $B(y)$.

Необходимость условий, указанных в приведенных теоремах для единственности предельных распределений, распространяется на случай, когда дисперсионная функция $B(y)$ обращается в нуль в бесконечном множестве точек, если считать выполненным условие (4) или эквивалентное условие в том смысле, чтобы $A(-\infty) > 0$, $A(+\infty) < 0$. Действительно, если $A(y) > 0$ при $y \leqslant -N$ и $A(y) < 0$ при $y \geqslant N$, где N достаточно велико, то все нули функции $A(y)$ лежат внутри отрезка $[-N, +N]$, на котором функция $B(y)$ имеет конечное множество нулей; если при этом на отрезке $[-N, +N]$ имеется хотя бы один нуль функции $B(y)$, в котором $A(y) < 0$, предшествующий нулям функции $B(y)$, в которых $A(y) > 0$, то, при отсутствии совпадающих нулей функций $A(y)$ и $B(y)$, на всей оси Oy имеется не меньше двух интервалов, в которых $p(y)$ может быть отличным от нуля и определяется с точностью до постоянных множителей, т. е. в этом случае предельное распределение единственным быть не может.

Если же на отрезке $[-N, +N]$ имеется один общий нуль функций $A(y)$ и $B(y)$ и хотя бы один нуль функции $B(y)$, в котором $A(y)<0$, предшествует нулям функции $B(y)$, в которых $A(y)>0$, то на оси Oy имеется хотя бы один интервал, в котором $p(y)$ может быть отличным от нуля и определяется с точностью до постоянного множителя, и в этом случае, ввиду неопределенности приращения функции предельного распределения в общем нуле функций $A(y)$ и $B(y)$, предельное распределение единственным образом не определяется.

Построим ряд примеров стохастических уравнений вида (1), для которых выполнены условия (4) и в которых функция $B(y)$ обращается в нуль в бесконечном множестве точек.

Простейшими уравнениями такого вида являются уравнения

$$\Delta y = -y\Delta t + f(\alpha, y)\sqrt{\Delta t}, \quad Ef(\alpha, y) = 0, \quad Ef^2(\alpha, y) = B(y) = \cos^{2m} y, \tag{а}$$

$$\Delta y = -y\Delta t + f(\alpha, y)\sqrt{\Delta t}, \quad Ef(\alpha, y) = 0, \quad B(y) = \sin^{2m} y. \tag{б}$$

Первое из этих уравнений определяет при каждом натуральном m единственное непрерывное предельное распределение; например, при $m = 1$ имеем:

$$p(y) = \begin{cases} \dfrac{C}{\cos^4 y} e^{-2y \operatorname{tg} y} & \text{при } -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}; \\ 0 & \text{при } |y| \geqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Уравнение (б) определяет при любом натуральном m единственное дискретное предельное распределение $dP(0) = 1$.

Легко построить примеры стохастических уравнений вида (1), в которых функция $B(y)$ имеет бесконечное множество нулей только в одном направлении оси Oy. Для этого достаточно, например, взять

$$B(y) = [\varphi(y) - \sin y]^2,$$

где функция $\varphi(y)$ удовлетворяет условиям: $\varphi'(y) < 0$, $\lim\limits_{y \to -\infty} \varphi(y) = a$, $1 < a < \infty$, $\varphi(0) \geqslant 1$, $\lim\limits_{y \to +\infty} \varphi(y) = 0$.

Так, уравнение

$$\Delta y = -y\Delta t + \alpha(\operatorname{arc\,ctg} y - \sin y)\sqrt{\Delta t}, \quad E\alpha = 0, \quad E\alpha^2 = 1, \tag{в}$$

определяет единственное непрерывное предельное распределение $p(y) \equiv 0$ при $y \geqslant x_1$, где x_1 — наименьший корень уравнения $\operatorname{arc\,ctg} y - \sin y = 0$, $p(y)$ в интервале $-\infty < y < x_1$ определяется по общей формуле (3), где C определяется из условия $\int\limits_{-\infty}^{x_1} p(y)\,dy = 1$.

Построим теперь такие примеры уравнений вида (1) с бесконечным множеством нулей дисперсионной функции $B(y)$, в которых число нулей функции $A(y)$ мы можем задавать произвольно.

Возьмем уравнение

$$\Delta y = (-ky + \cos^2 y)\Delta t + f(\alpha, y)\sqrt{\Delta t}, \quad k > 0, \quad B(y) = \sin^2 y. \tag{г}$$

Функция $A(y) = -ky + \cos^2 y$ имеет несколько нулей, из которых один может совпасть с нулем функции $B(y)$; последнее имеет место, если $k = \dfrac{1}{n\pi}$, где n — натуральное число.

Уравнение (г) определяет единственное предельное распределение при любом k. Если $\frac{1}{(n+1)\pi} < k < \frac{1}{n\pi}$, то

$$p(y) = \begin{cases} \dfrac{C}{\sin^{2(1+k)} y} e^{2(ky \operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} y - y)} & \text{при } n\pi < y < (n+1)\pi; \\ 0 & \text{при } y \leqslant n\pi \text{ и } y \geqslant (n+1)\pi; \end{cases}$$

при $k = \frac{1}{n\pi}$ уравнение определяет дискретное предельное распределение $dP(n\pi) = 1$.

Аналогично, уравнение

$$\Delta y = (-ky + \sin^2 y)\,\Delta t + f(\alpha, y)\sqrt{\Delta t}, \quad k > 0, \quad B(y) = \cos^2 y, \quad \text{(д)}$$

определяет при любом k единственное предельное распределение при $\frac{1}{(2n+1)\pi/2} < k < \frac{1}{(2n-1)\pi/2}$ имеем

$$p(y) = \begin{cases} \dfrac{C}{\cos^{2(1+k)} y} e^{-2(ky \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y + y)} & \text{в интервале } (2n-1)\frac{\pi}{2} < y < (2n+1)\frac{\pi}{2}; \\ 0 & \text{при } y \leqslant (2n-1)\frac{\pi}{2} \text{ и } y \geqslant (2n+1)\frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

при $k = \frac{1}{(2n-1)\pi/2}$ уравнение определяет дискретное предельное распределение $dP[(2n-1)\pi/2] = 1$.

Приведем пример стохастического уравнения вида (1) с бесконечным множеством нулей дисперсионной функции, для которого предельное распределение не является единственным.

Возьмем уравнение

$$\Delta y = (-ky + \sin y)\,\Delta t + f(\alpha, y)\sqrt{\Delta t}, \quad 0 < k \leqslant \frac{2}{\pi}, \quad B(y) = \cos^2 y. \quad \text{(е)}$$

При $k = \frac{1}{(2n+1)\pi/2}$, где n — натуральное число или нуль, функции $A(y)$ и $B(y)$ имеют два общих нуля $y_{1,2} = \pm(2n+1)\pi/2$, и в этом случае, как известно, предельное распределение не определяется единственным образом.

Рассматриваемое уравнение не определяет единственного предельного распределения и в случае, когда $k \neq \frac{1}{(2n+1)\pi/2}$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$, т. е. когда функции $A(y)$ и $B(y)$ не имеют общих нулей, так как при $k < 2/\pi$ имеются нули функции $B(y)$, в которых функция $A(y) < 0$, предшествующие нулям функции $B(y)$, в которых $A(y) > 0$, например, $A(-\pi/2) < 0$, $A(+\pi/2) > 0$. Плотность $p(y)$ предельного распределения, определяемого уравнением (е), может быть отличной от нуля в интервалах $(2n\pi + \pi/2,\ 2n\pi + 3\pi/2)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, лежащих внутри отрезка $[-(x_1 + \pi), (x_1 + \pi)]$, где x_1 — наибольший корень уравнения $-ky + \sin y = 0$.

Львовский педагогический
институт

Поступило
1 II 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Тр. Физ.-матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **5**, 95 (1934). [2] Г. М. Гинзбург, Изв. АН СССР, сер. матем., **15**, 563 (1951).