Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 3

МАТЕМАТИКА

Е. А. ВОЛКОВ

К РЕШЕНИЮ МЕТОДОМ СЕТОК УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ПРОИЗВОДНЫЕ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 9 II 1955)

1. Как указывает ряд авторов ([1–3]), при решении методом сеток уравнений эллиптического типа с краевыми условиями, содержащими производные, возникают большие трудности, и в тех случаях, когда удается составить разностную схему, приближенное решение получается грубым. В ([3]) исследуется применяемый на практике для решения краевых задач с нормальной производной метод, имеющий погрешность порядка шага сетки h. В настоящей заметке предлагаются способы конечноразностной аппроксимации краевых условий с косой и нормальной производной для криволинейных областей и многоугольников, позволяющие решать многие задачи с погрешностью порядка h^2.

2. Для дважды дифференцируемой функции $u(x, y)$ в точке дважды дифференцируемой кривой Г, в которой касательная параллельна оси x, справедлива формула

$$u''_{xx} = u''_{ss} - ku'_y, \tag{1}$$

для s — дуга кривой; k — кривизна кривой (положительная, если кривая направлена вогнутостью вверх).

3. Пусть в области G с дважды дифференцируемой замкнутой границей Г задано уравнение

$$u''_{xx} + u''_{yy} = gu - f; \tag{2}$$

g, f — функции x и y, $g \geqslant 0$, с краевым условием на некоторой части или на всей границе Г

$$a - bu + cu'_n + du'_s = 0 \tag{3}$$

и на остальной части Г $u = e$, где u'_n — производная по внутренней нормали к Г; a, b, c, d и e — функции дуги Г; $b, c \geqslant 0$; $c^2 + d^2 = 1$. Краевое условие (3) в точках Г, в которых $c \geqslant c_0 > 0$, можно заменить условием

$$u'_n = -a + bu - du'_s, \tag{3'}$$

а в остальных точках, путем деления (3) на $|d|$, — условием

$$\pm u'_s = -a + bu - cu'_n. \tag{3''}$$

В (3′) и (3″) для простоты сохранены прежние обозначения коэффициентов.

4. Будем говорить, что решение уравнения (2) при заданных краевых условиях принадлежит классу H_m ($u \in H_m$), если оно имеет ограниченные все производные до m-го порядка включительно в открытой области G и до $(m-1)$-го порядка включительно в замкнутой области $\overline{G}$.

5. В точке *1* (рис. 1), в которой задано условие (3′), для приближенного решения можно составить разностное уравнение

$$u_1 = \frac{2\varphi u_4 + (2\nu\tau^2 + \omega)\, u_2 + (2\mu\tau^2 - \omega)\, u_3 + \varphi\,(a\psi + \tau^2 f)}{\varphi\,(2 + b\psi + \tau^2 g) + 2\tau^2\,(\mu + \nu)}, \qquad (4)$$

где $\varphi = \mu\nu\,(\mu + \nu)$, $\psi = 2\tau + \tau^2 k$, $\omega = \mu\nu\psi d$;

$$u_4 = \frac{2\,[(1+\lambda)^2 u_5 + (1-\lambda)^2 u_6 + (1-\lambda^2)\,(u_7 + u_8)] + h^2\,(1-\lambda^2)\, f}{8 + h^2\,(1-\lambda^2)\, g}; \qquad (5)$$

μ, ν — длина дуг Γ, соединяющих точку *1* с точками *2* и *3*; τ — расстояние по нормали от точки *1* до точки *4*, расположенной на диагонали, соединяющей точки *5* и *6*, на расстоянии $\lambda h : \sqrt{2}$ от середины диагонали. μ, ν и τ — величины порядка h. f и g в формуле (4) взяты в точке *1*, а в формуле (5) — в точке *4* *.

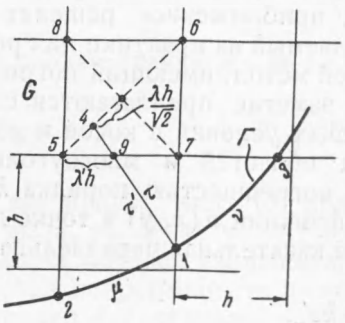


Рис. 1

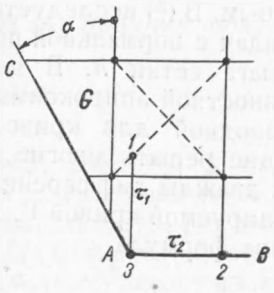


Рис. 2

В случае $d = 0$ или $\mu = \nu$ выражение (4) для $u \in H_4$ имеет невязку порядка h^3, что можно непосредственно проверить, используя формулу Тейлора, (1), (2) и (3′). Если $d \neq 0$ и $\mu \neq \nu$, выражение (4) для $u \in H_4$ имеет невязку порядка h^2, поэтому его следует заменить более простой формулой, имеющей невязку порядка h^2 для $u \in H_3$:

$$u_1 = \frac{\beta\,[(1-\lambda')\, u_5 + \lambda' u_7] + \tau'\,|\,d\,|\,u_i + \beta\tau' a}{\beta\,(1 + \tau' b) + \tau'\,|\,d\,|}, \qquad (6)$$

если $d \geqslant 0$, $i = 3$ и $\beta = \nu$; если $d \leqslant 0$, $i = 2$ и $\beta = \mu$, τ' — расстояние по нормали от точки *1* до точки *9*.

Если в точке *1* задано условие (3″), то для приближенного решения можно составить разностное уравнение, имеющее невязку порядка h^2 для $u \in H_3$:

$$u_1 = \frac{\beta c\,[(1-\lambda')\, u_5 + \lambda' u_7] + \tau' u_i + \beta\tau' a}{\tau'\,(1 + \beta b) + \beta c}, \qquad (7)$$

если в (3″) имеем $+ u'_s$, $i = 3$ и $\beta = \nu$; если в (3″) имеем $- u'_s$, $i = 2$ и $\beta = \mu$.

---

* Если предположить, что f и g удовлетворяют условию Липшица, то в обеих формулах f и g можно брать в какой-либо одной точке

Представляют интерес следующие случаи:

1) $d \equiv 0$. В точках пересечения линий сетки с Γ, в которых задано условие (3), составляются разностные уравнения (4), в остальных точках сетки составляются разностные уравнения обычным способом согласно таблицам 11 и 13 ([1]) *.

Если предположить, что существует вспомогательное решение $\bar{u} \in H_3$ уравнения (2) при некоторых $\bar{f} \geqslant f_0 > 0$, $\bar{a} \geqslant a_0 > 0$ и $\bar{e} \geqslant 0$, то для любого решения $u \in H_4$ приближенное решение при $\tau \geqslant \tau_0 h > 0$, согласно ([3]), будет иметь погрешность порядка h^2 **.

2) c обращается в нуль. В точках, в которых задано условие (3), составляются разностные уравнения (6) или (7). Погрешность приближенного решения имеет порядок h.

3) $c \geqslant c_0 > 0$. Граница Γ разбивается на равные дуги σ ($\mu = \nu = \sigma$) порядка h. В точках деления Γ на дуги σ, в которых задано условие (3′), составляются разностные уравнения (4), соответствующим выбором τ обеспечивается $2\sigma\tau^2 \geqslant |\omega|$. Точки деления Γ не совпадают с точками пересечения Γ и линий сетки. Поэтому во внутренних нестандартных точках сетки (например, точка 7) составляется выражение значения приближенного решения через 5 каких-либо значений приближенного решения в окружающих точках с положительными коэффициентами и невязкой порядка h^3, которое можно найти методом неопределенных коэффициентов. Погрешность приближенного решения имеет порядок h^2 при аналогичных предположениях, как в п. 1).

6. Если область G является многоугольником, особый интерес представляют вершины. Предположим, что на стороне AB (рис. 2) задано краевое условие $u'_n = -a_1 + b_1 u$, на стороне AC $u'_n = -a_2 + b_2 u$; тогда выражение

$$u_3 = \frac{2(\tau_2^2 u_1 + \tau_1^2 u_2) + \tau_1\tau_2\{\tau_1\tau_2 f + 2[(\tau_2 - \tau_1 \operatorname{tg}\alpha)\, a_1 + \tau_1 a_2 \sec\alpha]\}}{2(\tau_1^2 + \tau_2^2) + \tau_1\tau_2\{\tau_1\tau_2 g + 2[(\tau_2 - \tau_1 \operatorname{tg}\alpha)\, b_1 + \tau_1 b_2 \sec\alpha]\}}, \qquad (8)$$

где τ_1 — расстояние от точки 3 до точки 1 по нормали к AB; τ_2 — расстояние от точки 3 до точки 2, расположенной на AB, для решения $u \in H_4$ имеет невязку порядка h^3. В случае $\alpha > 0{,}5\pi$ имеет место аналогичная формула, точку 2 необходимо взять левее точки 3. В формуле (8) второе слагаемое знаменателя должно быть неотрицательным, поэтому α, близкие к $0{,}5\pi$ и $1{,}5\pi$, могут быть неудобными на практике.

7. Для целей моделирования решения краевых задач с нормальной производной пригодны формулы с невязкой порядка h^3 для некоторых многоугольников со сторонами, параллельными осям координат и биссектрисам координатных углов (см. также ([5])).

8. Формулы (4), (6) — (8) в некоторых случаях без существенных усложнений обобщаются на трехмерный случай, в частности, если область является прямым цилиндром или многогранником, каждое сечение которого плоскостью, параллельной любой координатной плоскости, является многоугольником вида, указанного в п. 7.

9. Решались методом сеток 2 уравнения Пуассона: 1) для функции $u = e^{-x^2-y^2}$ в круге радиуса 0,5 с центром в точке $x = y = 0$ при граничном условии $u'_n = 3u - 2e^{-0.25}$ и 2) для функции $u = \sqrt{xy}$ в квадрате $0{,}5 < x, y < 1$ с краевым условием $u'_n = 3{,}(3)\, u - a$. В обоих случаях

---

* В табл. 11 имеется опечатка: в формуле № 1 свободный член следует делить на 4, а не на 2.

** При предположении, что в (3) $b \geqslant b_0 > 0, \Gamma \in Л_3(B, \lambda)$ ([4]), можно установить порядок погрешности h^2, не прибегая к ([3]) и не делая предположения о существовании $\bar{u} \in H_3$.

$h = 0{,}1$. В 1-м случае максимальная погрешность при решении обычным способом ([1]) была 0,019, при решении предлагаемым способом 0,001. Во 2-м случае максимальная погрешность была, соответственно, 0,0071 и 0,0004. Учитывая, что обычный способ имеет погрешность порядка h, для достижения точности, полученной предлагаемым способом, потребовалось бы уменьшить h приблизительно в 15 раз.

Институт точной механики и вычислительной техники
Академии наук СССР

Поступило
7 II 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Ю. Панов, Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных, 1949. [2] L. Fox, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A, **242**, 345 (1950). [3] E. Batschelet, H. P. Striebel, Zs. angew. Math. Physik, **3**, № 3, 156 (1952). [4] Н. М. Гюнтер, Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, 1953. [5] Е. А. Волков, Вестн. МГУ, № 10, 3 (1950).