Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 3

МАТЕМАТИКА

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

ОДНО ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ЗАКОНА ТЕОРИИ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Обозначим через $H(x)$ четную целую трансцендентную функцию нулевого рода *, монотонно возрастающую при возрастании $|x|$, причем $H(0)>0$. В таком случае, как показано в ([1]), для всякой функции $f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$, удовлетворяющей неравенству

$$|f(x)|\leqslant H(x) \qquad (-\infty<x<\infty),$$

справедливо соотношение

$$A_q f(x)=\lim_{m\to\infty} E_m\left[f(x);\frac{m}{q}\right] \quad (q>0) \tag{1}$$

за возможным исключением не более счетного множества значений q [точек разрыва величины $A_q f(x)$]. Мы будем в дальнейшем рассматривать только те значения q, для которых соблюдается (1).

Целью настоящей заметки является доказательство следующего предложения:

Теорема. *Если существует бесконечная последовательность значений n, для которых* **

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant p^n H(x) \qquad (-\infty<x<\infty), \tag{2}$$

где p фиксировано, то $f(x)$ есть целая функция степени $\leqslant p$.

Для доказательства этой теоремы воспользуемся следующей леммой:

Лемма. *Если n и $m>n$ — целые числа и если функция $f(x)$ имеет в промежутке $(-1, 1)$ производную порядка n, удовлетворяющую неравенству $|f^{(n)}(x)|\leqslant M$ $(-1<x<1)$, то*

$$E_m[f(x);\ 1]<\frac{CM}{(m-n)^n}, \tag{3}$$

где C — абсолютная постоянная.

Зафиксируем $q>p$ и возьмем столь малое $\alpha>0$ $(\alpha<1)$, что

$$\frac{p}{(1-\alpha)q}<1.$$

Будем рассматривать только такие n, для которых осуществляется неравенство (2). Далее, будем брать только такие m, для которых

$$\beta<\frac{n}{m}\leqslant\alpha,$$

---

* Для соблюдения соотношения (1) достаточно, чтобы $H(x)$ была майорантой $(H(x)\in\mathfrak{M})$.

** Не нарушая общности, примем, что при $n=0$ неравенство (2) выполняется.

где $\beta < \alpha$ — произвольно выбранная положительная постоянная. В таком случае вследствие (3) неравенство (2) приводит при всяком $\lambda > 0$ к неравенству

$$E_m[f(x); \lambda] \leqslant C \frac{p^n \lambda^n H(\lambda)}{m^n (1-\alpha)^n}.$$

Положим

$$\lambda = \frac{m}{q} \qquad (q > p).$$

Тогда

$$E_m\left[f(x); \frac{m}{q}\right] \leqslant C\left[\frac{p}{(1-\alpha)q}\right]^n \cdot H\left(\frac{n}{\beta q}\right). \tag{4}$$

Обозначим

$$\frac{p}{(1-\alpha)q} = \rho^2.$$

В силу свойств функции $H(x)$ для всех n, начиная с некоторого, будет выполняться неравенство

$$H\left(\frac{n}{\beta q}\right) < \frac{1}{\rho^n}.$$

Для соответствующих m на основании (4) получим поэтому

$$E_m\left[f(x); \frac{m}{q}\right] \leqslant C\rho^n. \tag{5}$$

Так как правая часть (5) при достаточно большом n будет сколь угодно мала, то левая часть (5) стремится к нулю, когда m пробегает надлежащим образом выбранную последовательность. Но в качестве q взята точка непрерывности величины $A_q f(x)$. Значит, левая часть (5) имеет предел $A_q f(x)$ независимо от того, по какому закону изменяется m. Поэтому доказано, что

$$A_q f(x) = 0.$$

Следовательно, $f(x)$ есть целая функция степени $\leqslant q$. Остается принять во внимание, что q можно взять сколь угодно близким к p.

Поступило
25 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, ДАН, 54, 479 (1946) (см. также Собр. соч., т. II, стр. 390—393, 1954).