Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 3

МАТЕМАТИКА

С. Д. БЕРМАН

ГРУППОВЫЕ АЛГЕБРЫ АБЕЛЕВЫХ РАСШИРЕНИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

(Представлено академиком П. С. Александровым 28 I 1955)

Пусть G — конечная группа, K — алгебраически замкнутое поле, характеристика которого не делит порядок G. Предположим, что G является абелевым расширением группы H. Обозначим групповые алгебры групп G и H над полем K, соответственно, через $R(G, K)$ и $R(H, K)$. В настоящей заметке строится полная система минимальных идемпотентов центра и, в предположении цикличности G/H, — полная система попарно ортогональных минимальных идемпотентов $R(G, K)$, если такие системы известны для $R(H, K)$*.

Пусть $b_0H, \ldots, b_{q-1}H (b_0 = 1)$ — все смежные классы G по H. Так как G/H — абелева группа, то каждый смежный класс b_iH распадается на классы сопряженных элементов группы G. Пусть в b_iH входят классы $C_{i1}, \ldots, C_{is_i}$ $(i = 0, \ldots, q-1)$. Обозначим сумму элементов класса C_{ij} в $R(G, K)$ через k_{ij} $(i = 0, \ldots, q-1;\ j = 1, \ldots, s_i)$.

Если e'_t — минимальный идемпотент центра Z $R(G, K)$, то (1):

$$k_{ij} e'_t = \frac{h_{ij}}{n_t} \chi_t(g_{ij})\, e'_t \qquad (1)$$

($g_{ij} \in C_{ij}$; h_{ij} — порядок класса C_{ij}; χ_t — характер; n_t — степень абсолютно неприводимого представления G, соответствующего e'_t).

Пусть $e_1, \ldots, e_s$ — полная система минимальных идемпотентов центра $R(H, K)$. Каждый элемент $g \in G$ порождает автоморфизм φ_g алгебры $R(H, K)$: $\varphi_g(a) = g^{-1}ag$ $(a \in R(H, K))$. По отношению к группе различных автоморфизмов φ_g множество $M = \{e_1, \ldots, e_s\}$ распадается на непересекающиеся области транзитивности: $M = M_1 \cup \ldots \cup M_m$.

Пусть $M_i = \{e_{1i}, \ldots, e_{q_i i}\}$ $(i = 1, \ldots, m)$;

$$e_{ti} = \sum_{j=1}^{r_t} \tilde{e}_{ti}^{(j)}, \qquad (2)$$

где элементы $\tilde{e}_{ti}^{(j)}$ $(i = 1, \ldots, m;\ t = 1, \ldots, q_i;\ j = 1, \ldots, r_i)$ образуют полную систему попарно ортогональных минимальных идемпотентов $R(H, K)$. Положим

$$\bar{e}_i = e_{1i} + \ldots + e_{q_i i} \quad (i = 1, \ldots, m). \qquad (2')$$

Очевидно, $\bar{e}_i \in Z$, причем

$$1 = \bar{e}_1 + \ldots + \bar{e}_m; \quad \bar{e}_i^2 = \bar{e}_i; \quad \bar{e}_i \bar{e}_j = 0, \text{ если } i \neq j. \qquad (3)$$

* Эта задача при значительно более сильных ограничениях на группу G решена в (5).

Разложению (3) соответствуют прямые разложения

$$R(G, K) = \bar{I}_1 + \ldots + \bar{I}_m; \quad Z = Z_1 + \ldots + Z_m, \tag{4}$$

где $\bar{I}_i$ — двухсторонний идеал, порожденный идемпотентом $\bar{e}_i$, Z_i — центр $\bar{I}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Очевидно, степень алгебры Z_p над K равна наибольшему числу линейно независимых среди элементов $k_{ij}\bar{e}_p$ $(p = 1, \ldots, m;\ i = 0, \ldots, q-1;\ j = 1, \ldots, s_i)$. Пусть $P = Z \cap R(H, K)$. Легко показать, что идемпотенты $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_m$ образуют базис алгебры P над K. Произвольный элемент $x \in P$ представляется в виде

$$x = \alpha_1 \bar{e}_1 + \ldots + \alpha_m \bar{e}_m \quad (\alpha_i \in K;\ i = 1, \ldots, m). \tag{5}$$

Ввиду (5) и (3) для любого $x \in P$ имеет место формула:

$$x\bar{e}_i = \alpha\bar{e}_i \quad (\alpha \in K). \tag{6}$$

Положим

$$\delta_{ip} = \begin{cases} 0, & \text{если } k_{ij}\bar{e}_p = 0 \ (j = 1, \ldots, s_i); \\ 1, & \text{если найдется такое } j \ (1 \leqslant j \leqslant s_i), \text{ что } k_{ij}\bar{e}_p \neq 0. \end{cases}$$

Лемма. *При фиксированном p $(1 \leqslant p \leqslant m)$ смежные классы b_iH, для которых $\delta_{ip} = 1$, образуют подгруппу F_p фактор-группы G/H, причем степень алгебры Z_p над K равна порядку F_p.*

Доказательство. Пусть разложение $\bar{e}_p$ в сумму минимальных идемпотентов центра $R(G, K)$ имеет вид

$$\bar{e}_p = e'_1 + \ldots + e'_t. \tag{7}$$

Ввиду (1) и (7)

$$k_{ij}\bar{e}_p = \alpha_1 e'_1 + \ldots + \alpha_t e'_t \quad (\alpha_i \in K;\ i = 1, \ldots, t) \tag{8}$$

(коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ зависят от i, j, p).

Если $k_{ij} = b_iA$, где $A \in R(H, K)$ и порядок смежного класса b_iH равен m_i, то $(b_iA)^{m_i} = b_i^{m_i} A^{m_i} \in P$.

Значит, в силу (6),

$$(k_{ij}\bar{e}_p)^{m_i} = k_{ij}^{m_i}\bar{e}_p = \gamma_{ij}^{(p)}\bar{e}_p \quad (\gamma_{ij}^{(p)} \in K). \tag{9}$$

Из (8) и (9) получаем: $\alpha_1^{m_i} e'_1 + \ldots + \alpha^{m_i}_t e'_t = \gamma_{ij}^{(p)}\bar{e}_p$, откуда

$$\alpha_i = \sqrt[m_i]{\gamma_{ij}^{(p)}}. \tag{10}$$

Если $k_{ij}\bar{e}_p \neq 0$, то $\gamma_{ij}^{(p)} \neq 0$ (центр $R(G, K)$ не содержит нильпотентных элементов) и, ввиду (10),

$$\alpha_i \neq 0 \quad (i = 1, \ldots, t). \tag{11}$$

Пусть $b_{i_1}H \in F_p$; $b_{i_2}H \in F_p$. Тогда существуют элементы $k_{i_1j_1}$ и $k_{i_2j_2}$, для которых $k_{i_1j_1}\bar{e}_p \neq 0$; $k_{i_2j_2}\bar{e}_p \neq 0$. Согласно (8)

$$k_{i_1j_1}\bar{e}_p = \beta_1 e'_1 + \ldots + \beta_t e'_t; \quad k_{i_2j_2}\bar{e}_p = \lambda_1 e'_1 + \ldots + \lambda_t e'_t \tag{12}$$

и, ввиду (11),

$$\beta_i,\ \lambda_i \neq 0 \quad (i = 1, \ldots, t). \tag{13}$$

В силу (12) и (13)

$$k_{i_1j_1}\bar{e}_p \cdot k_{i_2j_2}\bar{e}_p = \beta_1\lambda_1 e'_1 + \ldots + \beta_t\lambda_t e'_t \neq 0. \tag{14}$$

С другой стороны,

$$k_{i_1j_1} \cdot k_{i_2j_2} = \sum_{i,j} \gamma_{ij} k_{ij} \tag{15}$$

(γ_{ij} — целые числа), где элементы k_{ij} соответствуют классам сопряженных элементов C_{ij} из смежного класса $b_{i_1} b_{i_2} H$. Если для всех C_{ij} из этого класса $k_{ij}\bar{e}_p = 0$, то, в силу (15), $k_{i_1 j_1}\bar{e}_p \cdot k_{i_1 j_2}\bar{e}_p = 0$, что противоречит (14).

Итак, если $b_{i_1} H \in F_p$ и $b_{i_2} H \in F_p$, то $b_{i_1} b_{i_2} H \in F_p$. Ввиду (1) и (8) из $b_{i_1} H \in F_p$ вытекает, что $b_{i_1}^{-1} H \in F_p$. Значит, F_p — подгруппа G/H.

Для завершения доказательства леммы остается показать, что элементы $k_{i_1 j_1}\bar{e}_p$ и $k_{i_2 j_2}\bar{e}_p$ линейно зависимы при $i_1 = i_2$ (т. е. когда $k_{i_1 j_1}$ и $k_{i_2 j_2}$ соответствуют классам сопряженных элементов $C_{i_1 j_1}$ и $C_{i_2 j_2}$ из одного смежного класса $b_{i_1} H$).

Пусть $k_{i_1 j_1} = b_{i_1} A_1$, $k_{i_1 j_2} = b_{i_1} A_2$ ($A_1, A_2 \in R(H, K)$); $k_{i_1 j_1}\bar{e}_p = \beta_1 e_1' + \ldots + \beta_t e_t' \neq 0$; $k_{i_1 j_2}\bar{e}_p = \gamma_1 e_1' + \ldots + \gamma_t e_t' \neq 0$.

Ввиду (10) и (11)

$$\beta_i,\ \gamma_i \neq 0 \quad (i = 1, \ldots, t); \qquad \beta_1^{m_{i_1}} = \ldots = \beta_t^{m_{i_1}} = \lambda \neq 0. \tag{16}$$

Положим $\gamma_i = \rho_i \beta_i$ ($i = 1, \ldots, t$). Тогда, в силу (16),

$$(k_{i_1 j_1}\bar{e}_p)^{m_{i_1}-1} \cdot k_{i_1 j_2}\bar{e}_p = (\beta_1^{m_{i_1}-1} e_1' + \ldots + \beta_t^{m_{i_1}-1} e_t')\ (\rho_1 \beta_1 e_1' + \ldots + \rho_t \beta_t e_t') =$$
$$= \rho_1 \beta_1^{m_{i_1}} e_1' + \ldots + \rho_t \beta_t^{m_{i_1}} e_t' = \lambda\ (\rho_1 e_1' + \ldots + \rho_t e_t'). \tag{17}$$

С другой стороны,

$$k_{i_1 j_1}^{m_{i_1}-1} \cdot k_{i_1 j_2} = b_{i_1}^{m_{i_1}} A_1^{m_{i_1}-1} \cdot A_2 \in P. \tag{18}$$

Ввиду (18) и (6)

$$(k_{i_1 j_1}\bar{e}_p)^{m_{i_1}-1} \cdot k_{i_1 j_2}\bar{e}_p = \delta \bar{e}_p \quad (\delta \in K). \tag{19}$$

Сравнивая (17) и (19), заключаем, что $\rho_1 = \ldots = \rho_t = \frac{\delta}{\lambda}$, откуда $k_{i_1 j_2}\bar{e}_p = \frac{\delta}{\lambda} k_{i_1 j_1}\bar{e}_p$. Лемма доказана.

Пусть F_p разлагается в прямое произведение циклических подгрупп: $F_p = (B_{p1}) \times \ldots \times (B_{pt_p})$, соответственно, порядков $\alpha_{p1}, \ldots, \alpha_{pt_p}$ ($p = 1, \ldots, m$). Выберем в каждом из смежных классов B_{pr} такие классы сопряженных элементов $C_{i_r j_r}$, что $(k_{i_r j_r}\bar{e}_p) \neq 0$ ($r = 1, \ldots, t_p$). Тогда, в силу (9),

$$(k_{i_r j_r}\bar{e}_p)^{\alpha_{pr}} = \gamma_r \bar{e}_p \quad (\gamma_r \neq 0;\ r = 1, \ldots, t_p). \tag{20}$$

Пусть $a_{pr} = k_{i_r j_r}\bar{e}_p / \sqrt[\alpha_{pr}]{\gamma_r}$. Ввиду (20)

$$(a_{pr})^{\alpha_{pr}} = \bar{e}_p \quad (r = 1, \ldots, t_p;\ p = 1, \ldots, m), \tag{21}$$

причем $(a_{pr})^n \neq \bar{e}_p$, если $n < \alpha_{pr}$.

Пусть ε_{pr} — первообразный корень степени α_{pr} из единицы. Положим $(\varepsilon, a_{pr}) = (\bar{e}_p + \varepsilon a_{pr} + \ldots + \varepsilon^{\alpha_{pr}-1} a_{pr}^{\alpha_{pr}-1})$.

Теорема 1. *Идемпотенты*

$$e^{(p)}_{i_1, \ldots, i_{t_p}} = \frac{1}{\alpha_{p1} \ldots \alpha_{pt_p}} (\varepsilon_{p1}^{i_1}, a_{p1}) \ldots (\varepsilon_{pt_p}^{i_{t_p}}, a_{pt_p})$$

$$(0 \leqslant i_r \leqslant \alpha_{pr} - 1;\ r = 1, \ldots, t_p;\ p = 1, \ldots, m) \tag{22}$$

образуют полную систему минимальных идемпотентов центра $R(G, K)$.

Действительно, идемпотенты $e^{(p)}_{i_1 \ldots i_{t_p}}$ отличны от нуля, принадлежат центру $R(G, K)$, попарно ортогональны и число их при фиксированном p равно $\alpha_{p1} \ldots \alpha_{pt_p}$ — порядку группы F_p.

Если G/H — циклическая группа, то F_p $(p = 1, \ldots, m)$ — также циклическая группа: $F_p = (B_p)$. В этом случае формулы (22) принимают вид

$$e_i^{(p)} = \frac{1}{\alpha_p}\left(\bar{e}_p + \varepsilon_p^i a_p + \ldots + \varepsilon_p^{i(\alpha_p - 1)} a_{p_j}^{\alpha_p - 1}\right) \quad (0 \leqslant i \leqslant \alpha_p - 1;\ p = 1, \ldots, m), \tag{22'}$$

и справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Идемпотенты*

$$e^{(p)}_{i,t,j} = e_i^{(p)} \cdot \tilde{e}^{(j)}_{tp} = \frac{1}{\alpha_p}\left(\tilde{e}^{(j)}_{tp} + \varepsilon_p^i a_p \tilde{e}^{(j)}_{tp} + \ldots + \varepsilon_p^{i(\alpha_p - 1)} a_p^{\alpha_p - 1} \tilde{e}^{(j)}_{tp}\right) \tag{23}$$

$$(p = 1, \ldots, m;\ t = 1, \ldots, q_p;\ j = 1, \ldots, r_p;\ i = 0, \ldots, \alpha_p - 1)$$

(*см. формулы* (2) *и* (2′)) *образуют полную систему минимальных ортогональных идемпотентов* $R(G, K)$.

Доказательство теоремы основывается на формулах (22′) и том факте, что подгруппу F_p в случае цикличности фактор-группы G/H можно представить в виде $F_p = F'_p/H$, где F'_p — подгруппа G, состоящая из всех элементов g, для которых $g^{-1} e_{1p} g = e_{1p}$ (см. (2′)). Последнее проще всего получить, использовав одну теорему работы ([2]).

Опираясь на леммы, аналогичные леммам 1 и 4 из ([3]), и теорему 1, можно доказать следующую теорему:

Теорема 3. *Пусть* G *— циклическое расширение группы* H; n *— порядок* G/H; $C_1, \ldots, C_s$ *— классы сопряженных элементов* G, *содержащиеся в* H; h_i *— число классов* H, *на которые распадается класс* C_i $(i = 1, \ldots, s)$. *Тогда число классов сопряженных элементов группы* G *равно* $n\left(\frac{1}{h_1} + \ldots + \frac{1}{h_s}\right)$.

Из (22) и (23) вытекает также

Теорема 4. *Пусть* G *— конечная разрешимая группа;* n *— наименьшее общее кратное порядков элементов* G; K *— алгебраически замкнутое поле, характеристика которого не делит порядок* G; Π *— простое подполе* K. *Тогда всякое представление* G *в поле* K *эквивалентно представлению в поле* $\Pi(\varepsilon)$, *где* ε *— первообразный корень степени* n *из* 1.

Теорема 4 в применении к разрешимым группам дает известный результат Брауэра о наименьшем поле разложения групповой алгебры конечной группы ([4]).

Теорема 4 может быть несколько усилена. Назовем полем характеров группы G поле, полученное присоединением к Π значений всех характеров G (представления берутся над полем K). Тогда, опираясь на (22) и (23), можно показать, что если $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_s = 1$ — композиционный ряд разрешимой группы G; K' — композит полей характеров групп G_i $(i = 0, \ldots, s)$ в K, то всякое представление G в K эквивалентно представлению в поле K'.

Ужгородский государственный университет

Поступило 23 X 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ван-дер-Варден, Современная алгебра, 1947. [2] A. H. Clifford, Ann. of Math., **38** (1937). [3] С. Д. Берман, ДАН, **91**, № 2 (1953). [4] R. Brauer, Am. J. Math., **69** (1947). [5] С. Д. Берман, ДАН, **98**, № 2 (1954).