Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. В. АЗБЕЛЕВ

К ВОПРОСУ О РАСПРОСТРАНЕНИИ МЕТОДА ЧАПЛЫГИНА ЗА ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 27 I 1955)

С. А. Чаплыгин предложил аппроксимировать решение y уравнения

$$y^{(n)} = f[y] \quad (f[y] = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})) \tag{1}$$

парой функций $\bar{z}$, и $\underline{z}$, удовлетворяющих неравенствам $\bar{z} > y > \underline{z}$ (1). Приближенное решение уравнения (1) в виде такой пары функций называется методом Чаплыгина и отличается простотой оценки погрешности, выражаемой разностью $\bar{z} - \underline{z}$. Функции $\bar{z}$ и $\underline{z}$ строятся на основании теоремы о дифференциальных неравенствах, применимость которой (2) ограничена. Ниже приводится теорема, обобщающая результаты работ (3, 4) и позволяющая отыскивать среди функций сравнения $z = z(x)$ такие, для которых неравенства $z^{(k)} > y^{(k)}$ ($z^{(k)} < y^{(k)}$), $k = 0,1, \ldots, n-1$, выполняются в данном промежутке (x_0, X), не зависящем от границ применимости теоремы о дифференциальных неравенствах.

Мы будем рассматривать уравнение (1) с начальными условиями

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

предполагая относительно правой части (1) следующее: 1) функция $f[y]$ непрерывна в прямоугольной области G $x_0 \leqslant x \leqslant X, a \leqslant y^{(k)} \leqslant b_k$, $k = 0,1, \ldots, n-1$, пространства $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, содержащей точку $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$; 2) функция $f[y]$ удовлетворяет в области G условиям L^* с коэффициентами $q_k = q_k(x)$, заключающимся в том, что на отрезке $[x_0, X]$ существуют такие непрерывные функции $q_k(x)$, что при данном x $(x_0 < x < X)$ и любой паре систем значений $y_1^{(k)}$ и $y_2^{(k)}$, удовлетворяющих соотношениям $b_k \geqslant y_1^{(k)} > y_2^{(k)} \geqslant a_k$, $k = 0,1, \ldots, n-1$, выполняются неравенства $f[y_1] - f[y_2] \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} (y_1^{(k)} - y_2^{(k)}) q_k$; 3) функция $f[y]$ удовлетворяет в области G условиям L^{**} с коэффициентами $p_k = p_k(x)$; эти условия предполагают существование на отрезке $[x_0, X]$ таких непрерывных функций $p_k(x)$, что при данном x $(x_0 < x < X)$ и любой паре систем значений $y_1^{(k)}$ и $y_2^{(k)}$, удовлетворяющих соотношениям $b_k \geqslant y_1^{(k)} > y_2^{(k)} \geqslant a_k$, $k = 0,1, \ldots, n-1$, выполняется неравенство $f[y_1] - f[y_2] \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (y_1^{(k)} - y_2^{(k)}) p_k$.

Отметим, что выполнение условий L^* (L^{**}) с коэффициентами $\underline{q}_k$ (p_k) влечет за собой выполнение этих условий и с коэффициентами $q_k \leqslant \underline{q}_k$ ($\bar{p}_k \geqslant p_k$), $k = 0,1, \ldots, n-1$. Кроме того, если в области G выполняются условия Липшица с постоянной K, то $q_k = -K$, $p_k = K$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Введем обозначения: y — решение уравнения (1) с начальными условиями (2). z — верхняя (нижняя) функция сравнения (2) относительно области G для уравнения (1) с начальными условиями (2), т. е. такая n раз

непрерывно дифференцируемая на отрезке $[x_0, X]$ функция, что $z^{(n)} \geqslant f[z]$ $(z^{(n)} \leqslant f[z])$, $a_k \leqslant z^{(k)} \leqslant b_k$ $(x_0 < x < X)$, $z^{(k)}(x_0) - y_0^{(k)} = \alpha_k \geqslant 0$ $(\alpha_k \leqslant 0)$, $k = 0,1, \ldots, n-1$. $\varphi = z^{(n)} - f[z]$. ξ — решение уравнения $\xi^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_k \xi^{(k)} + \Phi$ $(\xi^{(k)}(x_0) = z^{(k)}(x_0) - y_0^{(k)}, k = 0,1, \ldots, n-1)$, где $\Phi \geqslant \varphi$ $(\Phi \leqslant \varphi)$, а p_k — такие коэффициенты условий L^{**} для правой части (1) относительно области G, что $\xi^{(k)} > 0$ $(\xi^{(k)} < 0)$, $k = 0,1, \ldots, n-1$ (последнее неравенство выполняется, если p_k выбрать достаточно большими, например $p_k \geqslant 0$, $k = 0,1, \ldots, n-1$). φ_k, $k = 0,1, \ldots, n-1$, — непрерывные в промежутке (x_0, X) функции, удовлетворяющие в этом промежутке неравенствам

$$\varphi_k \geqslant 0 \ (\varphi_k \leqslant 0), \ k = 0,1, \ldots, n-1, \ \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k \leqslant \varphi \left(\sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k \geqslant \varphi \right).$$

Лемма 1. *Пусть в промежутке (x_0, X) разность $\eta^{(m)} = z^{(m)} - y^{(m)}$ $(m \leqslant n-1)$ меняет знак не более одного раза. Тогда в этом промежутке справедливы оценки $\eta^{(k)} < \xi^{(k)}$ $(\eta^{(k)} > \xi^{(k)})$, $k = 0,1, \ldots, m$.*

Лемма 2. *Пусть $a_k = q_k + \varphi_k / J_k$, где q_k — коэффициенты условий L^* для правой части (1) относительно области G, а J_k — непрерывные функции, удовлетворяющие в промежутке (x_0, X) неравенствам $J_k > 0$, $J_k > \eta^{(k)} = z^{(k)} - y^{(k)}$ $(J_k < 0, \ J_k < \eta^{(k)})$, $k = 0,1, \ldots, n-1$. Пусть, далее, производная $v^{(n-1)}$ решения уравнения $v^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-2} a_k v^{(k)}$, $v^{(k)}(x_0) \geqslant z^{(k)}(x_0) - y_0^{(k)}$ $(v^{(k)}(x_0) \leqslant z^{(k)}(x_0) - y_0^{(k)})$, $k = 0,1, \ldots, n-1$, не обращается в нуль внутри промежутка (x_0, X). Тогда в этом промежутке справедливы неравенства $z^{(k)} > y^{(k)}$ $(z^{(k)} < y^{(k)})$, $k = 0,1, \ldots, n-1$.*

На основании приведенных лемм может быть доказана следующая

Теорема. *Если $a_k = q_k + \varphi_k / \xi_{(k)} \geqslant 0$, $x_0 < x < X$, $k = 0,1, \ldots, n-2$, то $z^{(l)} > y^{(l)}$ $(z^{(l)} < y^{(l)})$, $x_0 < x < X$, $l = 0,1, \ldots, n-1$.*

Отметим вытекающие из этой теоремы следствия.

Следствие 1. *Пусть правая часть (1) удовлетворяет в области G условиям L^* с такими коэффициентами q_k, что $q_k \geqslant 0$, $k = 0,1, \ldots, n-2$. Тогда, независимо от коэффициента q_{n-1}, для любой верхней (нижней) функции сравнения z относительно области G справедливы неравенства $z^{(k)} > y^{(k)}$ $(z^{(k)} < y^{(k)})$, $x_0 < x < X$, $k = 0,1, \ldots, n-1$.*

Следствие 2. *Пусть существует такая положительная функция $u = u(x)$, что $L[u] = u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u \leqslant 0$. Тогда любое нетривиальное решение уравнения $L[y] = 0$ имеет не более одного нуля в промежутке (x_0, X). Кроме того в этом промежутке любая верхняя (нижняя) функция сравнения z для уравнения $L[y] = 0$ удовлетворяет неравенству $z > y$ $(z < y)$.*

Для уравнения $L[y] = y'' + Q(x)y = 0$ неравенство $L[x^{1/2}] = -{}^1/_4 x^{-3/2} + Q x^{1/2} \leqslant 0$ выполняется при условии

$$Q \leqslant 1/4x^2. \tag{3}$$

Поэтому, на основании следствия 2, нетривиальные решения уравнения $y'' + Qy = 0$ имеют при выполнении условия (3) не более одного нуля в промежутке (x_0, ∞). Таким образом получается обобщение известной теоремы Кнезера ([5]), где (3) заменяется неравенством $0 < Q \leqslant 1/4x^2$.

Ижевский
механический институт

Поступило
27 XII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чаплыгин, Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, 1950. [2] Н. В. Азбелев, ДАН, 89, № 4, 589 (1953). [3] Н. В. Азбелев, ДАН, 99, № 4 (1954). [4] Н. В. Азбелев, Тр. Ижевск. механ. инст., в. 1, 15 (1954). [5] В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, 1953.