Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 3

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Б. В. КАНТОРОВИЧ

КРИТИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ПОВОДУ СТАТЬИ И. Е. КУБЫНИНА «ОБ УРАВНЕНИЯХ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА И ГОРЯЩЕГО ВЕЩЕСТВА»

(Представлено академиком А. Н. Фрумкиным 25 X 1954)

Статья И. Е. Кубынина «Об уравнениях переноса тепла и горящего вещества», опубликованная в ДАН [1], построена на неверных физических предпосылках и содержит ряд математических ошибок. Во избежание использования развиваемой И. Е. Кубыниным теории для практических выводов, необходимо довести до сведения читателей критику этой теории.

1. Автор применяет общеизвестные уравнения теплопроводности:

$$\operatorname{div}(\lambda \nabla T) - \operatorname{div}(c_p \gamma \mathbf{W} T) - \frac{\partial (c_p \gamma T)}{\partial t} = Q \qquad (1)$$

и диффузии:

$$\operatorname{div}(D \nabla C) - \operatorname{div}(C \mathbf{W}) - \frac{\partial C}{\partial t} = -G, \qquad (2)$$

причем G — скорость химической реакции, а $Q = \theta G$ — соответствующий источник тепла в нераскрытом виде. Далее автор решает систему уравнений (1) и (2) для стационарного режима и для одномерной задачи. Чтобы замкнуть систему уравнений (1) и (2) автор допустил неверный прием, а именно: написав уравнение (2) в форме:

$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad} C) - C \operatorname{div} \mathbf{W} - (\mathbf{W} \operatorname{grad} C) - \frac{\partial C}{\partial t} = -G, \qquad (10)$$

он разделил произвольно уравнение (10) на две части, приравняв каждую из них нулю.

Таким образом, автор полагает, что

$$G = (\mathbf{W} \operatorname{grad} C) + \frac{\partial C}{\partial t}, \qquad (11)$$

$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad} C) - C \operatorname{div} \mathbf{W} = 0. \qquad (12)$$

С таким же основанием можно написать три таких комбинации, причем каждая из них, в том числе и принятая автором, не имеет физического смысла.

Более того, математическая предпосылка автора (11) или, в случае стационарного режима,

$$\mathbf{W} \operatorname{grad} C = G$$

противоречит физическому смыслу, поскольку величина G, т. е. конкретная скорость химической реакции, исключается и подменяется величиной $\mathbf{W} \operatorname{grad} C$, формально равной производной концентрации по времени в одномерной задаче, т. е. $dC/dt = W\, dC/dx$.

Та же предпосылка была введена автором в его статье ([2]). Величина dC/dt равна левой части известного кинетического уравнения:

$$G = \frac{dC}{dt} = kf(C, C', \ldots). \qquad (а)$$

В отличие от уравнения (10) уравнение (а) относится к неподвижной среде и не содержит никаких членов, выражающих перенос массы за счет диффузии и конвекции. Отбрасывая правую часть уравнения (а), выражающую опытную зависимость скорости данной реакции от концентраций действующих веществ и температуры, автор тем самым отрывает математическое выражение скорости реакции от ее реального физического содержания.

Разорвав таким образом уравнение (10) на две произвольные части, автор тем самым исключает из рассмотрения конкретное топливо и подменяет его рассмотрением топлива вообще («горящего вещества»).

2. Отбрасывая члены, выражающие теплопроводность и диффузию, и объединяя уравнения (1) и (2), автор приходит к формуле

$$C = \frac{A}{T} - B, \qquad (7)$$

из которой нетрудно получить известное приближенное и правильное выражение для теоретической максимальной температуры горения:

$$T_{\text{макс}} = \frac{C_{\text{в}}\theta}{\gamma_{\text{в}} c_p} + T_{\text{в}}. \qquad (б)$$

Предпосылка (11) в данном случае не играет роли, так как при объединении уравнений (1) и (2) величина G исключается. Нетрудно показать, что и сделано в статье автора ([3]), что точно так же, отбрасывая теплопроводность в уравнении (1), но вводя в это уравнение предпосылку $\mathbf{W}\,\mathrm{grad}\,C = G$, мы неминуемо получим для максимальной температуры горения формулу, опубликованную в ([3]):

$$T_{\text{макс}} = T_{\text{в}} e^{C_{\text{в}}\theta/c_p\gamma_{\text{в}}T_{\text{в}}}, \qquad (в)$$

которая: 1) полностью противоречит правильной формуле (б), выведенной без предпосылки (11); 2) дает значения $T_{\text{макс}}$ во много раз больше, чем по формуле (б), и не находится в соответствии с опытом. Это еще раз показывает, что основная предпосылка (11) физически необоснована.

3. Укажем на некоторые основные математические ошибки статьи.

1) Переход от уравнения (4), объединяющего уравнения (1) и (2), к уравнению (5) ничем не обоснован, так как из (5) вытекает явно невозможное равенство (постулируемое автором):

$$\mathrm{div}\,(\lambda \nabla T) = \theta\,\mathrm{div}\,(D\nabla C).$$

Отсюда следует, что формула (7), полученная из уравнения (5), не может удовлетворять одновременно и уравнению (4). При подстановке в уравнение (4) величин, содержащихся в равенствах (8), получается равенство

$$(\lambda - c_{p_{\text{в}}}\gamma_{\text{в}} D_{\text{в}})\,\mathrm{grad}\,T = 0, \qquad (9)$$

которое как раз и показывает невозможность удовлетворения равенства (7) уравнению (4), в чем нетрудно убедиться, подставляя в уравнение (9) значение

$$\lambda = c_{p_в} \frac{\gamma_в T_в}{T} D_в \left(\frac{T}{T_в}\right)^2 = c_{p_в} \gamma_в D_в \frac{T}{T_в}.$$

2) Потери тепла автор учитывает в граничном условии при $T = T_{макс}$:

$$-\frac{dT}{dx} = \frac{\alpha \lambda T_{макс}}{c_{p_в} \gamma_в W_в T_в} (T_{макс} - T_{ст}), \qquad (22)$$

которое получается путем приравнивания «количества тепла, образуемого в конце зоны горения»:

$$Q_1 = \frac{c_{p_в} \gamma_в W_в}{\lambda_в} \frac{T_в}{T_{макс}} \frac{dT}{dx},$$

количеству тепла, переданного в окружающую среду:

$$Q_2 = \alpha (T_{макс} - T_{ст}).$$

Не говоря о том, что при правильной постановке задачи потери тепла боковым стенкам должны быть учтены не в граничном условии (22), а в уравнении (1), заметим, что выражение Q_1 имеет размерность град/м^2 и физический смысл его совершенно непонятен, а выражение Q_2 имеет размерность ккал/м^2·час. Поэтому уравнение (22) является неверным по своей размерности. Но даже не обращая на это внимания, анализируя уравнение (23), нетрудно убедиться, что максимум переменной величины T, входящей в это уравнение, имеет место при $x = \infty$. Соответствующее же физическому смыслу и опыту решение задачи должно было дать $T_{макс}$ при наличии потерь тепла на какой-то конечной длине.

Получается это потому, что граничное условие (22) автор относит к точке $T_{макс}$, в то время как оно должно относиться к конечной длине топки.

4. Вид температурной кривой по длине топки, показанной на рис. 1 ([1]), не имеет ничего общего с действительными кривыми, получаемыми в опытах и имеющими максимум на конечной длине. Это показывает, что постановка задачи автором не соответствует реальным условиям горения и теплообмена в топке. Три опытные точки, приведенные автором, для которых не указано, при каких условиях и для какого топлива они получены, не могут убедить в соответствии теории с опытом. Не может служить проверкой теории и экспоненциальный характер кривой, при помощи которой, как известно, можно получить хорошую аппроксимацию в первоначальном участке кривой, где имеет место подъем температуры.

5. В уравнениях (21) и (23) показатель степени $\frac{x}{\lambda_м + \lambda_0}$ при основании неперовых логарифмов получается размерной величиной.

Поступило
17 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Е. Кубынин, ДАН, **87**, № 2 (1952). [2] И. Е. Кубынин, ЖТФ, **17**, № 12, 1415 (1947). [3] И. Е. Кубынин, там же, стр. 1411.