Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 2

МАТЕМАТИКА

И. М. РАПОПОРТ

ОБ ОЦЕНКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 28 III 1955)

1. Мы рассматриваем ниже вопрос об оценке собственных значений эрмитова линейного оператора A в гильбертовом пространстве H, обладающего замкнутой в H ортонормальной системой собственных векторов $\{e_k\}$:

$$\sum_k |(f, e_k)|^2 = \|f\|^2 \tag{1}$$

для любого вектора $f \in H$.

Пусть x — произвольный нормированный вектор из области определения D_A оператора A; λ — произвольное вещественное число. Полагая в уравнении замкнутости (1) $f = Ax - \lambda x$ и замечая, что

$$(Ax - \lambda x, e_k) = (x, Ae_k) - \lambda (x, e_k) = (\lambda_k - \lambda)(x, e_k)$$

(λ_k — собственное значение, соответствующее собственному вектору e_k), найдем

$$\|Ax - \lambda x\|^2 = \sum_k (\lambda_k - \lambda)^2 |(x, e_k)|^2 \geqslant \inf_k (\lambda_k - \lambda)^2, \tag{2}$$

так как по условию $\|x\| = 1$.

Полагая в неравенстве (2) $\lambda = (Ax, x)$ и вводя обозначение

$$\delta = Ax - (Ax, x)\, x, \tag{3}$$

придем к теореме включения Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова ([1]): *интервал* $[(Ax, x) - \|\delta\|, (Ax, x) + \|\delta\|]$ *содержит по крайней мере одно собственное значение оператора* A *.

Пусть в некотором интервале $a \leqslant \lambda < b$, не содержащем точек сгущения спектра, собственные значения перенумерованы в порядке их возрастания: $\ldots < \lambda_{k-1} < \lambda_k < \lambda_{k+1} < \ldots$ (λ_k может быть и кратным собственным значением). Если известны оценки $\lambda_{k-1} < \overline{\lambda}_{k-1}$, $\lambda_{k+1} > \underline{\lambda}_{k+1}$, то из неравенства

$$\overline{\lambda}_{k-1} + \|\delta\| \leqslant (Ax, x) \leqslant \underline{\lambda}_{k+1} - \|\delta\| \tag{4}$$

---

* В статье ([1]) теорема установлена для задачи Штурма — Лиувилля и для интегрального уравнения с симметрическим ядром.

вытекает двухсторонняя оценка

$$(Ax, x) - \|\delta\| \leqslant \lambda_k \leqslant (Ax, x) + \|\delta\| \tag{5}$$

для собственного значения λ_k. Как мы показываем ниже, эта оценка может быть улучшена.

Полагая $\lambda = (Ax, x) + \alpha$, найдем:

$$\|Ax - \lambda x\|^2 = \|Ax\|^2 - 2\lambda(Ax, x) + \lambda^2 = \\ = \|Ax\|^2 - (Ax, x)^2 + \alpha^2 = \|\delta\|^2 + \alpha^2.$$

Таким образом, при любом вещественном α интервал $[(Ax, x) + \alpha - \sqrt{\|\delta\|^2 + \alpha^2},\ (Ax, x) + \alpha + \sqrt{\|\delta\|^2 + \alpha^2}]$ содержит по крайней мере одно собственное значение оператора A. Предполагая попрежнему выполненным условие (4) и полагая $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$, где

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}\left[(Ax, x) - \overline{\lambda}_{k-1} - \frac{\|\delta\|^2}{(Ax, x) - \overline{\lambda}_{k-1}}\right],$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\left[\underline{\lambda}_{k+1} - (Ax, x) - \frac{\|\delta\|^2}{\underline{\lambda}_{k+1} - (Ax, x)}\right],$$

придем к выводу, что каждый из двух интервалов

$$\left[\overline{\lambda}_{k-1},\ (Ax, x) + \frac{\|\delta\|^2}{(Ax, x) - \overline{\lambda}_{k-1}}\right], \qquad \left[(Ax, x) - \frac{\|\delta\|^2}{\underline{\lambda}_{k+1} - (Ax, x)},\ \underline{\lambda}_{k+1}\right]$$

содержит по крайней мере одно собственное значение оператора A. Но согласно (4) каждый из указанных интервалов может содержать только собственное значение λ_k, и мы приходим к следующей теореме:

Теорема. *Если эрмитов линейный оператор A в гильбертовом пространстве H обладает замкнутой в H ортонормальной системой собственных векторов и для нормированного вектора $x \in D_A$ выполняется неравенство*

$$\overline{\lambda}_{k-1} + \|\delta\| \leqslant (Ax, x) \leqslant \underline{\lambda}_{k+1} - \|\delta\| \qquad (\lambda_{k-1} < \overline{\lambda}_{k-1} < \underline{\lambda}_{k+1} < \lambda_{k+1}),$$

где $\delta = Ax - (Ax, x)x$, то для собственного значения λ_k оператора A имеет место двухсторонняя оценка

$$(Ax, x) - \frac{\|\delta\|^2}{\underline{\lambda}_{k+1} - (Ax, x)} \leqslant \lambda_k \leqslant (Ax, x) + \frac{\|\delta\|^2}{(Ax, x) - \overline{\lambda}_{k-1}}.$$

2. Пусть A — регулярный линейный самосопряженный квазидифференциальный оператор порядка $2n$ в $L^2(a, b)$; D_A — совокупность функций $x(t)$, абсолютно непрерывных вместе со всеми квазипроизводными вплоть до $(2n-1)$-й включительно на $[a, b]$ и удовлетворяющих заданным самосопряженным краевым условиям и условию $Ax(t) \in L^2(a, b)$. Введем обозначения

$$\tilde{\lambda} = \int_a^b x(t)\, Ax(t)\, dt, \qquad \varepsilon = \left\{\int_a^b [Ax(t) - \tilde{\lambda} x(t)]^2 dt\right\}^{1/2}, \tag{6}$$

где $x(t)$ — некоторая функция из D_A, удовлетворяющая условию нормирования $\int_a^b x^2(t)\,dt = 1$. Тогда, если

$$\overline{\lambda}_{k-1} + \varepsilon \leqslant \tilde{\lambda} \leqslant \underline{\lambda}_{k+1} - \varepsilon,$$

то для собственного значения λ_k имеет место двухсторонняя оценка

$$\tilde{\lambda} - \frac{\varepsilon^2}{\underline{\lambda}_{k+1} - \tilde{\lambda}} \leqslant \lambda_k \leqslant \tilde{\lambda} + \frac{\varepsilon^2}{\tilde{\lambda} - \overline{\lambda}_{k+1}} \tag{7}$$

(для всякой функции $f(t) \in L^2(a, b)$ имеет место равенство Парсеваля (1)). Отсюда, в частности, следует общеизвестная верхняя оценка первого собственного значения $\lambda_1 \leqslant \tilde{\lambda}$ (можно положить $\overline{\lambda}_0 = -\infty$).

Если в задаче Штурма — Лиувилля

$$x'' + (\lambda - q(t))\,x = 0, \quad x(0) = x(l) = 0 \tag{8}$$

функция $q(t)$ ограничена, то имеют место известные оценки

$$\underline{\lambda}_k = \frac{\pi^2 k^2}{l^2} + m, \quad \overline{\lambda}_k = \frac{\pi^2 k^2}{l^2} + M, \quad m = \inf_{0 \leqslant t \leqslant l} q(t), \quad M = \sup_{0 \leqslant t \leqslant l} q(t). \tag{9}$$

Полагая в формулах (6) $x(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi k t}{l}$, $a = 0$, $b = l$, найдем:

$$\tilde{\lambda} = \frac{\pi^2 k^2}{l^2} + \frac{2}{l} \int_0^l q(t) \sin^2 \frac{\pi k t}{l}\,dt,$$

$$\varepsilon = \left\{ \frac{2}{l} \int_0^l \left[\frac{\pi^2 k^2}{l^2} - \tilde{\lambda} - q(t) \right]^2 \sin^2 \frac{\pi k t}{l}\,dt \right\}^{1/2}. \tag{10}$$

Если выполняется неравенство

$$-\frac{(2k-1)\pi^2}{l^2} + M + \varepsilon \leqslant \frac{2}{l} \int_0^l q(t) \sin \frac{2\pi k t}{l}\,dt \leqslant \frac{(2k+1)\pi^2}{l^2} + m - \varepsilon,$$

то, подставляя $\tilde{\lambda}$ и ε из (10) в (7), получим на основании грубых оценок (9) более тонкие оценки для собственного значения λ_k.

В качестве примера рассмотрим краевую задачу

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+t}\frac{dx}{dt}\right) + \lambda x = 0, \quad x(0) = x(1) = 0,$$

приводящуюся к виду (8) с функцией $q(t) = \frac{7}{4(2+3t)^2}$ и с $l = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$. Неравенство (7) приводит к оценкам:

$$6{,}77386 \leqslant \lambda_1 \leqslant 6{,}77399, \quad 26{,}71625 \leqslant \lambda_2 \leqslant 26{,}71672,$$
$$59{,}93250 \leqslant \lambda_3 \leqslant 59{,}93287, \quad 106{,}43118 \leqslant \lambda_4 \leqslant 106{,}43145,$$
$$166{,}21381 \leqslant \lambda_5 \leqslant 166{,}21406 \text{ и т. д.}$$

Как видим, даже весьма грубое приближение к k-й собственной функции $\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi kt}{l}$ приводит к хорошим двухсторонним оценкам для собственных значений.

Заметим в заключение, что неравенствами (7) можно пользоваться как рекуррентными соотношениями для вычисления верхних и нижних оценок собственных значений.

Примечание. Если вместо краевой задачи $Ax=\lambda x$ рассматривать краевую задачу $Ax=\lambda\rho(t)x$ $(0<m\leqslant\rho(t)\leqslant M<\infty$ при $a\leqslant t\leqslant b)$, то неравенство (7) остается в силе, если условие нормирования $\int\limits_a^b x^2(t)\,dt=1$ для функции $x(t)$ заменить условием $\int\limits_a^b x^2(t)\rho(t)\,dt=1$ и формулу (6) для ε заменить формулой

$$\varepsilon=\left\{\int\limits_a^b\left[Ax(t)-\tilde{\lambda}\rho(t)x(t)\right]^2\frac{dt}{\rho(t)}\right\}^{1/2}.$$

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
2 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, Изв. АН СССР, Отд. физ.-мат. наук, № 5 (1929).