Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 2

ФИЗИКА

Академик Н. Н. БОГОЛЮБОВ и Д. В. ШИРКОВ

О РЕНОРМАЛИЗАЦИОННОЙ ГРУППЕ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

1. Как известно, обычная теория возмущений с ренормализацией дает для основных функций Грина спинорной электродинамики ряды, в которых в области больших импульсов появляются члены типа $[e^2 \ln (k^2 / m^2)]^n$. Можно сказать, что в этой области фактическое разложение идет не по квадрату заряда, а по $e^2 \ln (k^2 / m^2)$. Возникает поэтому задача суммирования всех главных членов для вычисления функций типа $f(e^2 \ln (k^2 / m^2))$. Положение осложняется тем, что по определении этой функции следует также просуммировать члены типа $e^{2n} [\ln (k^2 / m^2)]^{n-1}$, приводящие к выражению $e^2 f_1 (e^2 \ln (k^2 / m^2))$, для того, чтобы хотя бы и post factum оправдать интуитивное предположение о том, что в ряду

$$f\left(e^2 \ln \frac{k^2}{m^2}\right) + e^2 f_1\left(e^2 \ln \frac{k^2}{m^2}\right) + \ldots \qquad (1)$$

первый член будет «главным». Более детальное исследование вопроса о приведении ряда теории возмущений к виду (1) приводит все к более и более сложным суммированиям отдельных групп членов.

Можно показать, однако, что все указанные трудности носят искусственный характер и могут быть преодолены, если воспользоваться имеющейся в квантовой электродинамике ренормализационной группой. На существование такой группы и ее роль вообще в квантовой теории поля впервые обратили внимание Штюкельберг и Петерман [1], которые указали также на возможность введения соответствующих инфинитезимальных операторов и тем самым на возможность построения дифференциальных уравнений Ли.

С другой точки зрения, но по существу та же ренормализационная группа была использована Гел-Маном и Лоу [2], причем уже для получения конкретных сведений о поведении функций Грина в асимптотической области больших импульсов.

Целью настоящей заметки является дальнейшее развитие этих идей и, в частности, получение общих формул, позволяющих перейти от результатов обычной теории возмущений не только к области больших импульсов, но также и к области «инфракрасной катастрофы».

2. Обратимся к основным функциям спинорной электродинамики — фермионной функции Грина G и функции Грина для фотона D. Заметим с самого начала, что мы не будем явно вовлекать в рассмотрение вершинный оператор Г, имея в виду, что все его необходимые свойства могут быть получены из G при помощи тождества Уорда. Устранение расходимостей из указанных функций Грина производится при помощи известной процедуры вычитания расходящихся контрчленов из лагранжиана взаимодействия.

В том случае, когда нулевое приближение фотонной функции Грина выбрано в чисто поперечной форме ([3])

$$D^0_{mn}(k) = \frac{i}{k^2}\left(g^{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2}\right), \tag{2}$$

указанная процедура вычитания контрчленов оказывается эквивалентной* мультипликативной перенормировке функций Грина и заряда фермиона, предложенной Дайсоном. При этом после устранения расходимостей в теории остается произвол ([1]), соответствующий возможности введения конечных добавок к обычным контрчленам, что в свою очередь эквивалентно конечной перенормировке функций Грина. Исследуем подробнее этот произвол.

Мы будем считать, таким образом, что после устранения бесконечностей при помощи некоторой фиксированной вычитательной процедуры получены конечные функции Грина G и D. При этом из условия совпадения затравочной массы электрона с ее наблюдаемым экспериментальным значением однозначно определяется контрчлен δm, не связанный с мультипликативной перенормировкой. Контрчлен Z_3 однозначно определяется из требования совпадения затравочного заряда с экспериментальным значением e_0. При этом умножение расходящейся константы Z_3 на конечный фактор z_3 приводит к конечной перенормировке заряда

$$Z_3 \to Z_3 z_3; \quad e \to z_3^{-1/2} e. \tag{3}$$

Наконец, контрчлены Z_1 и Z_2 оказываются определенными с точностью до конечных констант z_1 и z_2, подчиненных лишь тождеству Уорда

$$Z_1 \to Z_1 z_1, \quad Z_2 \to Z_2 z_2; \quad z_1 = z_2. \tag{4}$$

Ввиду того, что в рассматриваемом случае (2) изменение контрчленов сводится к перенормировке функций Грина, мы приходим к следующей совокупности конечных преобразований конечных величин:

$$G_1 \to G_2 = z_2 G_1; \quad D_1 \to D_2 = z_3 D_1; \quad e_1 \to e_2 = z_3^{-1/2} e_1. \tag{5}$$

Смысл преобразования (5) состоит в том, что употребление в теории величин G_1, D_1 и e_1 приводит к тем же самым результатам, что и употребление величин G_2, D_2 и e_2, т. е. к описанию частиц с массой и зарядом, равными их экспериментальным значениям.

Группа преобразований (5) представляет собой «группу ренормализации» Штюкельберга и Петермана ([1]) и позволяет получить простые функциональные уравнения для функций Грина, подобные уравнениям Гел-Мана и Лоу ([2]).

3. Имея в виду получение таких уравнений, представим G и D в виде

$$G(k) = i\,\frac{a(k^2)\,\hat{k} + b(k^2)\,m}{k^2 - m^2}, \tag{6}$$

$$D_{mn}(k) = \frac{i}{k^2}\left(g^{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2}\right) d(k^2). \tag{7}$$

---

* Доложено Д. В. Ширковым на Всесоюзном совещании по квантовой электродинамике и теории элементарных частиц 1 IV 1955 г.

Заметим, далее, что входящие в определение G и D две произвольные константы z_2 и z_3 можно зафиксировать при помощи следующих условий:

$$d = 1, \; a = 1 \quad \text{при } k^2 = \lambda^2, \tag{8}$$

где λ^2 произвольно. Из соображений однородности в пространстве импульсов вытекает, что a, b и d имеют вид

$$a = a\left(\frac{k^2}{\lambda^2}, \frac{m^2}{\lambda^2}, e^2\right); \quad b = b\left(\frac{k^2}{\lambda^2}, \frac{m^2}{\lambda^2}, e^2\right);$$
$$d = d\left(\frac{k^2}{\lambda^2}, \frac{m^2}{\lambda^2}, e^2\right),$$

причем по определению импульса λ

$$a\left(1, \frac{m^2}{\lambda^2}, e^2\right) = d\left(1, \frac{m^2}{\lambda^2}, e^2\right) = 1. \tag{9}$$

Нужно сказать, что второе из условий (8) не является необходимым, так как если, например, $a = a_0$ при $k^2 = \lambda^2$, то в дальнейшие рассуждения константа a_0 войдет несущественным множителем.

Квадрат импульса λ^2 может быть непосредственно связан с зарядом e. Подставляя (7) во второе уравнение (5) с учетом третьего уравнения (5), находим

$$d\left(\frac{k^2}{\lambda_2^2}, \frac{m^2}{\lambda_2^2}, e_2^2\right) = z_3 d\left(\frac{k^2}{\lambda_1^2}, \frac{m^2}{\lambda_1^2}, e_1^2\right), \tag{10}$$

причем

$$e_2^2 = z_3^{-1} e_1^2. \tag{11}$$

Полагая в (10) $k^2 = \lambda_1^2$, с учетом (9) получаем

$$z_3 = d\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}, \frac{m^2}{\lambda_2^2}, e_2^2\right),$$

откуда вытекает функциональное уравнение для d:

$$d\left(\frac{k^2}{\lambda_1^2}, \frac{m^2}{\lambda_1^2}, e^2\right) = d\left(\frac{k^2}{\lambda_2^2}, \frac{m^2}{\lambda_2^2}, e_2^2\right) \Big/ d\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}, \frac{m^2}{\lambda_2^2}, e_2^2\right), \tag{12}$$

причем

$$e_1^2 = e_2^2 d\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}, \frac{m^2}{\lambda_2^2}, e_2^2\right). \tag{13}$$

Свяжем теперь заряд e^2, содержащийся в формулах (12), (13), с наблюдаемым значением заряда e_0^2. В этом случае истинная фотонная функция нормирована в точке $k^2 = 0$ и потому имеет вид

$$d = d\left(\frac{k^2}{m^2}, e_0^2\right). \tag{14}$$

Имеем, следовательно,

$$e^2 = e_0^2 d\left(\frac{\lambda^2}{m^2}, e_0^2\right). \tag{15}$$

Обратимся к фермионной функции Грина. Рассуждение проведем одновременно для функций a и b, введя для них на данном этапе общее обозначение s.

Записав для s уравнение, аналогичное (10), и определив константу z_2, приходим после ее исключения к функциональному уравнению для s:

$$s\left(\frac{k^2}{\lambda_2^2}, \frac{m^2}{\lambda_2^2}, e_2^2\right) s\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}, \frac{m^2}{\lambda_1^2}, e_1^2\right) = s\left(1, \frac{m^2}{\lambda_2^2}, e_2^2\right) s\left(\frac{k^2}{\lambda_1^2}, \frac{m^2}{\lambda_1^2}, e_1^2\right). \quad (16)$$

4. Приступим к выводу дифференциальных уравнений для d и s. Вводя обозначения $k^2/\lambda_2^2 = x$, $m^2/\lambda_2^2 = y$, $\lambda_1^2/\lambda_2^2 = t$, запишем (12) и (16) в виде

$$e^2 d(x, y, e^2) = e^2 d(t, y, e^2)\, d\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, e^2 d(t, y, e^2)\right) \quad (17)$$

и

$$\ln s(x, y, e^2) + \ln s\left(1, \frac{y}{t}, e^2 d(t, y, e^2)\right) =$$

$$= \ln s\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, e^2 d(t, y, e^2)\right) + \ln s(t, y, e^2). \quad (18)$$

Дифференцируя (17) и (18) по x и полагая затем $t = x$, получаем

$$\frac{\partial e^2 d(x, y, e^2)}{\partial x} = \frac{e^2 d(x, y, e^2)}{x}\left[\frac{\partial}{\partial \xi} d\left(\xi, \frac{y}{x}, e^2 d(x, y, e^2)\right)\right]_{\xi=1}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \ln s(x, y, e^2)}{\partial x} = \frac{1}{x}\left[\frac{\partial}{\partial \xi} s\left(\xi, \frac{y}{x}, e^2 d(x, y, e^2)\right)\right]_{\xi=1}. \quad (20)$$

Отсюда следует, что для вычисления функций d и s во всей области изменения их аргументов достаточно определить $d(k^2/\lambda^2, y, e^2)$ и $s(k^2/\lambda^2, y, e^2)$ лишь в окрестности $k^2/\lambda^2 \sim 1$, для чего можно воспользоваться обычной теорией возмущений. Совершенно ясно, что аналогичные свойства имеют место и для вершинных операторов Г.

Полученные уравнения выражают тот факт, что благодаря наличию ренормализационной группы можно растягивать шкалу импульсов, одновременно изменяя заряд.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
16 V 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. C. G. Stueckelberg, A. Petermann, Helv. Phys. Acta, 26, 499 (1953). [2] M. Gell-Mann, F. E. Low, Phys. Rev., 95, 1300 (1954). [3] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ДАН, 95, 773 (1954).