Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 2

МАТЕМАТИКА

П. В. НИКОЛАЕВ

БИНАРНЫЕ АНАМОРФОЗЫ УРАВНЕНИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ПРОСТОЙ *A*-МНОЖИТЕЛЬ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 IV 1955)

Аналитическое в некоторой области G (невырожденное) уравнение

$$F(t,\tau)=F(t_1,\tau_1;t_2,\tau_2;t_3,\tau_3)=0 \tag{1}$$

может допускать простой A-множитель

$$\psi_3(t,\tau)=\psi_3(t_1,\tau_1;t_2,\tau_2) \tag{2}$$

лишь тогда, если, как и для N-рационального уравнения ([1]), размерность $F(t,\tau)$ по (t_3,τ_3) равна 3 или 2 ($r_3=3,2$), как это имеет место и для уравнения

$$\Phi(t,\tau)=\psi_3(t,\tau)F(t,\tau)=|f_{i1}(t_i,\tau_i);\ f_{i2}(t_i,\tau_i);f_{i3}(t_i,\tau_i)|. \tag{3}$$

Признаки, определяющие размерность $F(t,\tau)$, известны ([1]).

Пусть при $r_3=3$ базисное разложение уравнения (1) имеет вид

$$F(t,\tau)=\sum_{k=1}^{3}F_k(t,\tau)f_{3k}(t_3,\tau_3)=0, \tag{4}$$

где $F_k(t,\tau)=F_k(t_1,\tau_1;t_2,\tau_2)$ являются частными значениями функции $F(t,\tau)$ при постоянных $t_3=t_{3k}$, $\tau_3=\tau_{3k}$ ([2]).

Нетрудно показать, что для уравнения (4) анаморфоза (3) возможна в том и только в том случае, если будут справедливы тождества

$$\sum_{k=1}^{3}F_k(t,\tau)f_{ik}(t_i,\tau_i)=0\quad(i=1,2). \tag{5}$$

Для случая уравнения от 3 переменных $F(t_1,t_2,t_3)=0$ условия (5) были указаны Келлогом ([3]).

Выражая условия (5) через частные значения функций $F_k(t,\tau)$ и пользуясь сокращенными обозначениями

$$F_k^{(ij)}=F_k(t_{1i},\tau_{1i};t_{2j},\tau_{2j});\quad t_{k0}=t_k;\quad \tau_{k0}=\tau_k,$$

получаем:

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение* (5) *допускало простой A-множитель* (2), *необходимо, чтобы при произвольных частных значениях переменных* $t_k=t_{ki}$, $\tau_k=\tau_{ki}$ $(k,i=1,2)$ *соблюдались тождества*

$$|F_1^{(0i)};F_2^{(0i)};F_2^{(0i)}|=0\quad(i=1,2,0); \tag{6}$$

$$|F_1^{(i0)};F_2^{(i0)};F_3^{(i0)}|=0\quad(i=1,2,0), \tag{7}$$

и достаточно, чтобы эти тождества (6), (7) *были соблюдены для некоторой системы частных значений* $t_k = t_{k1}$, $\tau_k = \tau_{k1}$ *этих переменных, при которой ранги матриц, составленных из первых строк определителей* (6), (7) (*при* $i \neq 0$), *были равны* 2.

Подобные условия анаморфозы были указаны для уравнения от 3 переменных И. А. Вильнером ([4]).

Развертывая определители (6), (7) по элементам последней строки, имеем

$$\sum_{k=1}^{3} F_k^{(00)} A_{ik}(t_i, \tau_i) = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{8}$$

и, сравнивая (8) и (5), получаем выражение для элементов анаморфозы (3):

$$f_{ik} = A_{ik} \quad (i = 1, 2;\ k = 1, 2, 3). \tag{9}$$

Если уравнение (1) вещественно, то оно допускает вещественные же анаморфозы, так как можно взять вещественными как базисное разложение (4), так и матрицы (6), (7).

Анаморфоза (3) будет с точностью до проективных преобразований единственна; допустив обратное, придем к вырождению функции $F(t, \tau)$.

При $r_3 = 2$ для уравнения (1) с базисным разложением

$$F(t, \tau) = \sum_{k=1}^{2} F_k^{(00)} f_{3k}(t_3, \tau_3) = 0 \tag{10}$$

справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а 2. $t_2 = t_{2i}$, $\tau_2 = \tau_{2i}$ $(i = 1, 2)$, $t_1 = t_{1k}$, $\tau_1 = \tau_{1k}$ $(k = 3, 4)$— *произвольные значения переменных, удовлетворяющие лишь условиям*

$$\frac{F_2^{(0i)}}{F_1^{(0i)}} \neq \text{const}, \qquad \begin{vmatrix} F_1^{(k1)} & F_2^{(k1)} \\ F_1^{(k2)} & F_2^{(k2)} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (i = 1, 2;\ k = 3, 4). \tag{11}$$

Уравнение (10) *тогда и только тогда допускает А-множитель* (2), *если для произвольных постоянных* a_1, b_1, a_2 $(a_2 \neq a_1)$ *найдется константа* b_2, *при которой система уравнений*

$$|F_1^{(0i)}; F_2^{(0i)}; a_i F_1^{(0i)} + b_i F_2^{(0i)}| = 0 \quad (i = 1, 2, 0); \tag{12}$$

$$|F_1^{(k0)}; F_2^{(k0)}; a_k F_1^{(k0)} + b_k F_2^{(k0)}| = 0 \quad (k = 3, 4, 0), \tag{13}$$

где $a_0 F_1^{(00)} + b_0 F_2^{(00)} = F_3^{(00)}$, *будет совместна относительно неизвестной функции* $F_3^{(00)}$, *если постоянные* a_k, b_k $(k = 3, 4)$ *определяются через* a_i, b_i *из условий*

$$F_i^{(ki)}(a_k - a_i) + F_2^{(ki)}(b_k - b_i) = 0 \quad (i = 1, 2;\ k = 3, 4). \tag{14}$$

Для доказательства этой теоремы следует, наряду с уравнением (10), рассмотреть, как и в случае N-рациональных уравнений ([1]), вспомогательное уравнение размерности 3 по (t_3, τ_3) с дополнительной функцией $F_3^{(00)}$.

При соблюдении условий теоремы (2) элементы f_{ik} $(i=1,2;\ k=1,2,3)$ анаморфозы будут равны адъюнктам определителей (12) и (13), отвечающим элементам последней строки определителей (при $i=0$).

За постоянную b_2, как это нетрудно показать, можно принять выражение

$$b_2 = b_1 + (a_1 - a_2)\frac{F_1^{(11)}}{F_2^{(11)}}, \tag{15}$$

где $t_1 = t_{11}$, $\tau_1 = \tau_{11}$ есть решение уравнения

$$|F_j^{(0i)}| = 0 \quad (j, i = 1, 2). \tag{11'}$$

Положив в теореме 2 произвольные постоянные равными: $a_1 = b_1 = 0$, $a_2 = 1$, получим, в частности, для уравнения

$$f_3(t_3, \tau_3) = F(t_1, \tau_1; t_2, \tau_2) \tag{16}$$

следующую теорему:

Теорема 3. *Уравнение* (16) *тогда и только тогда допускает А-множитель* (2), *если при некоторой константе* b_2 *имеет место тождество*

$$|1; F^{(k0)}; \varphi^{(k0)}[1 - b_2 F^{(k2)}]| = 0 \quad (k = 3, 4, 0), \tag{17}$$

где

$$\varphi^{(00)} = \frac{F^{(01)} - F^{(00)}}{F^{(01)} - F^{(02)}}, \tag{18}$$

или, что все равно, если отношение определителей

$$|1; F^{(k0)}; \varphi^{(k0)}| : |1; F^{(k0)}; \varphi^{(k0)} F^{(k2)}| \tag{19}$$

постоянно.

Здесь выбор значений переменных $t_2 = t_{2i}$, $\tau_2 = \tau_{2i}$ $(i = 1, 2)$, $t_1 = t_{1k}$, $\tau_1 = \tau_{1k}$ $(k = 3, 4)$, как и в теореме 2, подчинен лишь условиям

$$F^{(0i)} \neq \text{const}; \quad F^{(k2)} - F^{(k1)} \neq 0 \quad (i = 1, 2; k = 3, 4). \tag{20}$$

Определяя, наконец, константу b_2 формулой (15) и выбор значений переменных условиями (20), придем к следующей теореме:

Теорема 4. *Уравнение* (16) *в том и только в том случае допускает А-множитель* (2), *если справедливо тождество*

$$|1; F^{(k0)}; \varphi^{(k0)} \psi^{(k2)}| = 0 \quad (k = 3, 4, 0), \tag{21}$$

где

$$\varphi^{(00)} = \frac{F^{(01)} - F^{(00)}}{F^{(01)} - F^{(02)}}, \quad \psi^{(02)} = \frac{F^{(11)} - F^{(02)}}{F^{(11)}}.$$

В этой теореме $t_1 = t_{11}$, $\tau_1 = \tau_{11}$ — решение уравнения

$$F^{(01)} - F^{(02)} = 0 \tag{22}$$

при $F^{11} \neq 0$, и тогда

$$b_2 = \frac{1}{F^{(11)}}. \tag{23}$$

При соблюдении для уравнения (16) условий теоремы элементы f_{ih} $(i = 1, 2;\ k = 1, 2, 3)$ его анаморфозы будут равны, соответственно, адъюнктам матриц

$$\left\|\begin{matrix} 1 & F^{(01)} & 0 \\ 1 & F^{(02)} & 1-b_2F^{(02)} \end{matrix}\right\|;\qquad \left\|\begin{matrix} 1 & F^{(30)} & \varphi^{(30)}[1-b_2F^{(32)}] \\ 1 & F^{(40)} & \varphi^{(40)}[1-b_2F^{(42)}] \end{matrix}\right\|, \tag{24}$$

где b_2 определено формулой (19) или (22).

Если уравнение (10), (16) вещественно, то оно будет допускать также вещественные анаморфозы, так как можно исходить из его вещественного базисного разложения и рассматривать лишь вещественные матрицы (24), что, очевидно, возможно при определении b_2 формулой (19).

Если уравнение (10), (16) не сводится отбрасыванием некоторого множителя вида $\varphi(t_1, \tau_1; t_2, \tau_2)$ к уравнению третьего N-порядка, то единственность его анаморфоз с A-множителем (2) следует из теоремы о проективности анаморфоз уравнений 5-го N-порядка ([1]).

Указанные в настоящей работе теоремы позволяют решить вопрос об анаморфозе (3) при помощи A-множителя (2) для уравнения (1) (в частности, для уравнения с 3 переменными) во всех тех случаях, когда она существует, и найти элементы анаморфозы при помощи лишь рациональных операций над частными значениями функции $F(t, \tau)$.

Уральский политехнический институт
им. С. М. Кирова
Свердловск

Поступило
10 I 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. В. Николаев, ДАН, 97, № 4 (1954). [2] П. В. Николаев, ДАН, 88, № 2 (1953). [3] O. D. Kellog, Zs. f. Math. u. Phys., 63, 159 (1914). [4] И. А. Вильнер, ДАН, 90, № 1 (1953).