Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 3

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Э. БУРШТЕЙН и Л. СОЛОВЬЕВ

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ОСНОВНОЙ ВОЛНЫ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 1 XII 1954)

Целью настоящей работы является определение фазовой скорости * и лучей основной волны **, распространяющейся между двумя параллельными идеально проводящими поверхностями.

Пусть средняя поверхность, находящаяся на одинаковом расстоянии от рассматриваемых поверхностей, задана в параметрическом виде уравнением

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(u,\ v), \tag{1}$$

где за координатные линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ приняты линии кривизны данной поверхности. Включим поверхность (1) в триортогональную систему поверхностей

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(u,\ v) + w\,\mathbf{n}(u,\ v), \tag{2}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности (1). Как известно (2), при этом u, v, w образуют ортогональную систему координат, в которой коэффициент Ламэ h_3, соответствующий w, равен единице.

Уравнения Максвелла $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} = k_0^2\mathbf{H}$ в принятой системе координат имеют вид:

$$\frac{1}{h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial(h_2H_2)}{\partial u} - \frac{\partial(h_1H_1)}{\partial v}\right]\right) - \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_2}{h_1}\left[\frac{\partial(h_1H_1)}{\partial w} - \frac{\partial H_3}{\partial u}\right]\right)\right\} = k_0^2H_1,$$

$$\frac{1}{h_1}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_1}{h_2}\left[\frac{\partial H_3}{\partial v} - \frac{\partial(h_2H_2)}{\partial w}\right]\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial(h_2H_2)}{\partial u} - \frac{\partial(h_1H_1)}{\partial v}\right]\right)\right\} = k_0^2H_2, \tag{3}$$

$$\frac{1}{h_1h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_2}{h_1}\left[\frac{\partial(h_1H_1)}{\partial w} - \frac{\partial H_3}{\partial u}\right]\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_1}{h_2}\left[\frac{\partial H_3}{\partial v} - \frac{\partial(h_2H_2)}{\partial w}\right]\right)\right\} = k_0^2H_3.$$

Для решения поставленной задачи необходимо решить уравнения (3) с граничными условиями, заданными на поверхностях $w = \pm d/2$, где d — расстояние между граничными поверхностями.

Слабую искривленность ограничивающих поверхностей будем, следуя методу С. М. Рытова (2), характеризовать постоянными малыми параметрами, входящими множителями при u, v, w в уравнение (2), т. е. уравнением, определяющим координатные поверхности, считаем уравнение

$$\mathbf{r} = \vec{\rho}(\lambda u,\ \nu v) + \mu w\,\mathbf{n}(\lambda u,\ \nu v). \tag{4}$$

---

* Под фазовой скоростью понимается скорость распространения фазы по средней поверхности.

** Основной волной мы называем волну, которая в предельном случае плоских ограничивающих поверхностей переходит в однородную плоскую волну.

Малые параметры μ, λ, ν указывают на медленное изменение свойств поверхностей при изменении координат u, v, w. Выясним более определенный для нашего случая смысл малых параметров μ, λ, ν.

Из (4) следует, что коэффициенты Ламе также являются функциями λu, νv, μw:

$$h_1 = h_1(\lambda u,\ \nu v,\ \mu w), \quad h_2 = h_2(\lambda u,\ \nu v,\ \mu w). \tag{5}$$

Представим коэффициенты Ламе в виде разложения около некоторой точки M средней поверхности $w = 0$, координаты которой u и v примем за нулевые:

$$\begin{aligned} h_1 &= h_{10}\left(1 + \lambda \frac{h_{1u}}{h_{10}^2} h_{10}u + \nu \frac{h_{1v}}{h_{10}h_{20}} h_{20}v + \mu \frac{h_{1w}}{h_{10}} w + \ldots\right), \\ h_2 &= h_{20}\left(1 + \lambda \frac{h_{2u}}{h_{10}h_{20}} h_{10}u + \nu \frac{h_{2v}}{h_{20}^2} h_{20}v + \mu \frac{h_{2w}}{h_{20}} w + \ldots\right); \end{aligned} \tag{6}$$

здесь h_{10}, h_{20} — значения коэффициентов Ламе в точке M; h_{1u}, h_{1v}, h_{1w}, ... — производные коэффициентов Ламе в точке M по медленно меняющимся аргументам λu, νv, μw. Будем считать отклонения от точки M $h_1 u$, $h_2 v$, w порядка 1, тогда из соотношений (6) следует, что λ, ν и μ характеризуют малость сравнительно с 1 членов $\lambda h_{2u} / h_{10}h_{20}$, $\nu h_{1v} / h_{10}h_{20}$ и $\mu h_{1w} / h_{10}$, $\mu h_{2w} / h_{20}$, или, переходя к производным по u, v, w, членов:

$$\frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial u} = -\gamma_{g1}, \quad \frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial v} = \gamma_{g2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial w} = \gamma_1, \quad \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial w} = \gamma_2, \tag{7}$$

где γ_{g1} и γ_{g2} — геодезические кривизны координатных линий $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$, а γ_1 и γ_2 — кривизны нормальных сечений вдоль линий $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$ средней поверхности (1).

Таким образом, параметр μ характеризует кривизны главных нормальных сечений средней поверхности γ_1 и γ_2, а параметры λ и ν характеризуют кривизны ее координатных линий (линий кривизны).

Решая (3) методом разложения в ряд по малым параметрам, ищем решение в виде ряда по μ, λ, ν. Соответственно и волновое число представляется рядом по μ, λ, ν:

$$k = k_0 + \mu k_1 + \lambda k_2 + \nu k_3 + \ldots + \mu^n \lambda^m \nu^p k_N + \ldots \tag{8}$$

Легко видеть, однако, что в разложении волнового числа отсутствуют члены, не содержащие μ. Действительно, полагая $\mu = 0$, мы переходим к случаю ограничивающих поверхностей, обе главные кривизны которых равны 0, т. е. к задаче распространения основной волны между параллельными плоскостями. Очевидно, фазовая скорость при этом равна скорости света и, следовательно, $k = k_0$.

Используя инвариантность уравнений (3) относительно одновременного изменения знака μ, w и H_3 и симметрию граничных условий по w, можно показать, что компоненты H_1 и H_2 магнитного поля основной волны не меняются при одновременном изменении знаков μ и w, а H_3 меняет знак на обратный. Отсюда следует, что фазовая скорость основной волны (при $w = 0$) должна зависеть только от четных степеней μ. Следовательно, для нахождения волнового числа k с точностью до μ^2 в предположении, что λ и ν малы (λ, $\nu \ll 1$), достаточно собрать члены, не содержащие λ и ν.

Таким образом, нам остается решить уравнение (3) с коэффициентами Ламе, в которых координаты u и v фиксированы. Волновые

уравнения (3), переписанные в виде $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{H} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} + k_0^2\mathbf{H} = 0$, при $h_1 = h_1(w)$, $h_2 = h_2(w)$ имеют вид:

$$\frac{\partial^2(h_1H_1)}{\partial w^2} + \left(\frac{h_2'}{h_2} - \frac{h_1'}{h_1}\right)\frac{\partial(h_1H_1)}{\partial w} + \frac{1}{h_1^2}\frac{\partial^2(h_1H_1)}{\partial v^2} + \\ + \frac{1}{h_2^2}\frac{\partial^2(h_1H_1)}{\partial v^2} + 2\frac{h_1'}{h_1}\frac{\partial H_3}{\partial u} + h_1H_1 = 0,$$

$$\frac{\partial^2(h_2H_2)}{\partial w^2} + \left(\frac{h_1'}{h_1} - \frac{h_2'}{h_2}\right)\frac{\partial(h_2H_2)}{\partial w} + \frac{1}{h_1^2}\frac{\partial^2(h_2H_2)}{\partial u^2} + \\ + \frac{1}{h_2^2}\frac{\partial^2(h_2H_2)}{\partial v^2} + 2\frac{h_2'}{h_2}\frac{\partial H_3}{\partial v} + h_2H_2 = 0, \qquad (9)$$

$$\frac{\partial^2 H_3}{\partial w^2} + \left(\frac{h_1'}{h_1} + \frac{h_2'}{h_2}\right)\frac{\partial H_3}{\partial w} + \frac{1}{h_1^2}\frac{\partial^2 H_3}{\partial u^2} + \frac{1}{h_2^2}\frac{\partial^2 H_3}{\partial v^2} + \\ + \frac{1}{h_1}\left(\frac{h_2'}{h_2} - \frac{h_1'}{h_1}\right)\frac{\partial H_1}{\partial u} + \frac{1}{h_2}\left(\frac{h_1'}{h_1} - \frac{h_2'}{h_2}\right)\frac{\partial H_2}{\partial v} + H_3 = 0.$$

Тройку функций $F_1 = h_1H_1$, $F_2 = h_2H_2$, $F_3 = H_3$, удовлетворяющих уравнениям (9) и граничным условиям $\partial F_1/\partial w = \partial F_2/\partial w = F_3 = 0$ при $w = \pm d/2$, ищем в виде

$$F_j = f_j(w)\, e^{ik_0(\alpha h_{10}u + \beta h_{20}v)} \quad (j = 1,\ 2,\ 3). \qquad (10)$$

Разлагая коэффициенты уравнений (9) в ряд по медленно меняющейся переменной μw, а постоянные распространения α и β в ряд по четным степеням μ:

$$\alpha = \alpha_0 + \mu^2\alpha_1 + \ldots, \quad \beta = \beta_0 + \mu^2\beta_1 + \ldots,$$

где α_0, β_0 — направляющие косинусы волны в рассматриваемой точке ($\alpha_0 = \cos\theta$, $\beta_0 = \sin\theta$), ищем решение $f_j(w)$ в виде ряда

$$f_j(w) = f_{j,0}(w) + \mu f_{j,1}(w) + \mu^2 f_{j,2}(w) + \ldots$$

Уравнение (9) распадается на системы обыкновенных дифференциальных уравнений (различных порядков по μ) для функций $f_{j,n}$. В нулевом приближении f_j имеют вид $f_{1,0} = -\beta_0$, $f_{2,0} = \alpha_0$, $f_{3,0} = 0$. Подставляя эти значения в уравнения первого приближения, находим $f_{j,1}$ и т. д., используя при этом граничные условия и указанную выше инвариантность f_j относительно одновременной замены знака w и μ. В процессе нахождения последовательных приближений f_j определяются также последовательные приближения α и β.

Не приводя значений для функций f_j, напишем полученное выражение для волнового вектора волны, распространяющейся под углом θ к линиям $v = \text{const}$:

$$k = k_0\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = k_0 - k_0\left(\gamma_1^2\alpha_0^2 + 2\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2^2\beta_0^2 - \frac{2}{5}\gamma^2 k_0^2 d^2\right)\frac{d^2}{24}, \qquad (11)$$

где $\gamma = \gamma_1\alpha_0^2 + \gamma_2\beta_0^2$. Частный случай этой формулы, относящийся к распространению волны между параллельными цилиндрическими поверхностями, приведен в ряде работ (см., например, [3, 4]).

Зная фазовую скорость, можно найти распределение фазы на средней поверхности и «лучи» (нормальные траектории к линиям постоянной фазы). Пусть распределение фазы задается функцией $\Psi(u, v) = \text{const}$, а уравнение лучей функцией $\Phi(u, v) = \text{const}$. Представим $\Psi(u, v)$ и $\Phi(u, v)$ в виде $\Psi = \Psi_0 + \psi$, $\Phi = \Phi_0 + \varphi$, где $\Psi_0(u, v) = \text{const}$ определяет эквифазные линии в нулевом приближении (по μ^2), а $\Phi_0(u, v) = \text{const}$ являются лучами нулевого приближения, т. е. геодезическими линиями средней поверхности. Переписывая уравнение (11) в виде

$$\frac{1}{h_1^2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial v}\right)^2 = (\nabla \Psi)^2 = k_0^2 + 2k\Delta k$$

и считая $\nabla\psi$ и $\nabla\varphi$ малыми порядка Δk, в первом приближении по μ^2 найдем $\nabla\Psi_0\nabla\psi = k\Delta k$, т. е. $d\psi/ds = \Delta k$, где $d\psi/ds$ — производная вдоль луча в нулевом приближении. Интегрируя, получим

$$\psi = \int \Delta k\, ds, \tag{12}$$

где α_0, β_0, входящие в Δk, приближенно считаются равными направляющим косинусам луча нулевого приближения.

Для нахождения φ воспользуемся уравнением $\nabla\Psi\nabla\Phi = 0$. В первом приближении получаем $\nabla\Psi_0\nabla\varphi + \Phi_0\nabla\psi = 0$, откуда $k\, d\varphi/ds = -\nabla\Phi_0\nabla\psi$ и

$$\varphi = -\frac{1}{k}\int \nabla\Phi_0\nabla\psi\, ds; \tag{13}$$

отсюда легко найти отклонение луча в первом приближении от геодезической.

Действительно, рассмотрим луч первого приближения $\Phi_0(u, v) + \varphi(u, v) = c$. Представляя $\Phi_0(u, v)$ в виде разложения около близкой к u, v точки u_1, v_1, принадлежащей тому же лучу в нулевом приближении $\Phi_0(u, v) = c$, получим с точностью до первого порядка отклонения $\overline{\Delta l}$: $\Phi_0(u_1, v_1) + \nabla\Phi_0\overline{\Delta l} + \varphi(u_1, v_1) = c$. Отсюда, считая $\overline{\Delta l}$ направленным вдоль $\nabla\Phi_0$, получаем отклонение луча по нормали к геодезической:

$$\Delta l = -\frac{\varphi(u, v)}{|\nabla\Phi_0|}.$$

Интегрирование в формулах (12) и (13) производится вдоль лучей нулевого приближения от точек известной фазы до точек, в которых ищется приращение фазы или нормальное отклонение луча Δl.

Поступило
28 X 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Бляшке, Дифференциальная геометрия, 1935. [2] С. М. Рытов, Тр. ФИАН, **2**, 1 (1940). [3] H. Buchholz, Elektr. Nachr. Techn., **16**, 73 (1939). [4] S. O. Rice, Bell Syst. Tech. J., **27**, No. 2, 305 (1948).