Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 2

МАТЕМАТИКА

Б. М. ЛЕВИТАН

О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА В СЛУЧАЕ НЕОГРАНИЧЕННО РАСТУЩЕГО ПОТЕНЦИАЛА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 30 III 1955)

Рассмотрим уравнение

$$\Delta u + \{\lambda - q(x_1, x_2, x_3)\} u = 0 \qquad (1)$$

во всем пространстве E_3, где $q(x)$ (x — точка E_3) — непрерывная действительная функция. Известно, что если при $r \to \infty$ ($r = |x|$) $q(x) \to +\infty$, то уравнение (1) имеет точечный спектр и собственные значения неограниченно растут. Так как функция $q(x)$ снизу ограничена, то, не нарушая общности рассуждений, можно предполагать, что спектр задачи (1) неотрицателен. Обозначим через $\lambda_n = \mu_n^2$ ($n = 1, 2, \ldots$) собственные значения задачи (1) и через $\omega_n(x)$ — соответствующие собственные функции. В работе [1] мы изучили разложение по собственным функциям уравнения (1) функций с интегрируемым квадратом.

Если $q(x) \to +\infty$, то собственные функции на бесконечности экспоненциально убывают, и поэтому для построения ряда Фурье нет нужды предполагать, что функция имеет интегрируемый квадрат. В настоящей заметке изучается разложение по собственным функциям уравнения (1) функций, растущих на бесконечности как многочлен. Аналогичный вопрос в одномерном случае изучал Титчмарш [2], работа которого послужила толчком для настоящего исследования. Применяемый нами метод годится для пространств любого числа измерений, однако для простоты мы рассматриваем пространство трех измерений.

Нам понадобятся некоторые новые результаты об асимптотическом распределении собственных значений задачи (1), которые даются в следующей теореме.

Теорема 1. *Предположим, что функция $q(x)$ удовлетворяет следующим условиям*: 1) *Если* $r = |\xi - x| \leqslant 1$, *то* $|q(\xi) - q(x)| < A \cdot r \cdot q^a(x)$, *где* $A > 0$ *и* $0 < a < 3/2$ — *константы*; 2) *если* $r > 1$, *то* $q(\xi) < Bq(x) r^N$, *где* $B > 0$ *и* $N > 0$ — *константы. Положим* $\sigma(\lambda) = \operatorname{mes}\{q(x) < \lambda\}$, $\sigma_\tau(\lambda) = \int_0^\lambda \nu^\tau (\lambda - \nu)^{3/2} d\sigma(\lambda)$, *где* $\tau \geqslant 0$; 3) *существуют константы* α *и* β, $0 < \beta < \alpha + 1$, *такие, что*

$$\alpha \sigma_\tau(\lambda) < \lambda \sigma_\tau'(\lambda) < \beta \sigma_\tau(\lambda). \qquad (2)$$

Положим

$$a_n^{(\tau)} = \int_{E_3} q^\tau(x)\, \omega_n^2(x)\, dx.$$

При $\lambda \to \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{\lambda_n < \lambda} a_n^{(\tau)} \sim \frac{1}{6\pi^2} \int\limits_{q(x) < \lambda} q^\tau(x) \{\lambda - q(x)\}^{3/2} dx. \qquad (3)$$

Для $\tau = 0$ и двумерного пространства E_2 формула, аналогичная формуле (3), получена в работе Титчмарша ([3]). Метод Титчмарша с некоторыми изменениями применим и для $\tau > 0$. Другой вывод формулы (3) (при $\tau = 0$) предлагается в работе ([4]), однако этот вывод ошибочен (именно, ошибочен в этой работе вывод неравенства (13)).

Наметим кратко доказательство теоремы 1. Обозначим через $G(x, \xi; \mu)$ функцию Грина задачи (1) ($\mu = -\lambda, \lambda < 0$), и пусть $g(\xi, \eta; \mu) = \frac{1}{4\pi\rho} e^{-\rho\sqrt{q(x)+\mu}}$, $\rho = |\xi - \eta|$ ($g(\xi, \eta; \mu)$ есть функция Грина уравнения $\Delta_\xi u - [\mu + q(x)] u = 0$ с особенностью в точке $\xi = \eta$). Тогда (см. ([3]), формула (2,6)) имеет место интегральное уравнение *

$$G(x, \xi; \mu) = g(x, \xi; \mu) - \int\limits_{E_3} [q(\eta) - q(x)] g(\xi, \eta; \mu) G(x, \eta; \mu) d\eta. \qquad (4)$$

Можно показать, что условия 1 и 2 позволяют решить уравнение (4) при достаточно больших μ по методу последовательных приближений и, следовательно, представить функцию $G(x, \xi; \mu)$ в виде бесконечного ряда:

$$G(x, \xi; \mu) = g_0(x, \xi; \mu) + g_1(x, \xi; \mu) + \ldots, \qquad (5)$$

причем

$$g_0(x, \xi; \mu) = g(x, \xi; \mu);$$

$$g_n(x, \xi; \mu) = (-1)^n \int\limits_{E_3} [q(\eta) - q(x)] g(\xi; \eta; \mu) g_{n-1}(x, \eta; \mu) d\eta.$$

Далее можно показать, что ряд (5) можно дифференцировать по μ почленно любое число раз. Дифференцируя t раз, полагая $\xi = x$, множа на $q^\tau(x)$ и интегрируя по всему пространству, получим асимптотическую формулу ($\mu \to +\infty$)

$$\sum_n \frac{a_n^{(\tau)}}{(\lambda_n + \mu)^{t+1}} \sim \frac{1 \cdot 3 \cdots (2t-3)}{4\pi \cdot 2^t \cdot t!} \int\limits_0^\infty \frac{q^\tau(x)}{\{q(x) + \mu\}^{t-1/2}} dx =$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2t-3)}{4\pi \cdot 2^t \cdot t!} \int\limits_0^\infty \frac{d\psi_\tau(\lambda)}{(\lambda + \mu)^{t-1/2}},$$

где $\psi_\tau(\lambda) = \int\limits_0^\lambda \nu^\tau d\sigma(\nu)$, если только интеграл по E_3 существует.

Далее:

$$\int\limits_0^\infty \frac{d\psi_\tau(\lambda)}{(\lambda + \mu)^{t-1/2}} = \frac{\Gamma(t)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(t - 1/2)} \int\limits_0^\infty \frac{\left\{\int\limits_0^\lambda (\lambda - \nu)^{-1/2} d\psi_\tau(\nu)\right\}}{(\lambda + \mu)^t} d\lambda =$$

$$= \frac{2t!}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(t - 1/2)} \int\limits_0^\infty \frac{\left\{\int\limits_0^\lambda (\lambda - \nu)^{1/2} d\psi_\tau(\nu)\right\}}{(\lambda + \mu)^{t+1}} d\lambda.$$

---

* Уравнение (4) можно также получить, записывая дифференциальное уравнение для функций $G(x, \xi; \mu)$ в виде

$$\Delta_\xi G - [\mu + q(x)] G = [q(\xi) - q(x)] G$$

и решая затем это уравнение как уравнение Пуассона.

Поэтому

$$\sum_n \frac{a_n^{(\tau)}}{(\lambda_n+\mu)^{t+1}} \sim \frac{1\cdot 3\cdots(2t-3)}{6\pi\sqrt{\pi}\,2^{t-1}\Gamma(t-1/2)} \int_0^\infty \frac{d\sigma_\tau(\lambda)}{(\lambda+\mu)^{t+1}} = \frac{1}{6\pi^2}\int_0^\infty \frac{d\sigma_\tau(\lambda)}{(\lambda+\mu)^{t+1}}. \quad (6)$$

Так как, в силу нашего предположения, выполняются неравенства (2), то из (6) и тауберовой теоремы Келдыша ([5]) следует

$$\sum_{\lambda_n<\lambda} a_n^{(\tau)} \sim \frac{1}{6\pi^2}\int_0^\lambda \nu^\tau(\lambda-\nu)^{3/2}\,d\sigma(\nu) = \frac{1}{6\pi^2}\int_{q(x)<\lambda} q^\tau(x)\{\lambda-q(x)\}^{3/2}\,dx,$$

т. е. формула (3).

Формула (3) и метод, примененный нами в работе ([1]), позволяют доказать следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть $q(x)$ удовлетворяет условиям теоремы* 1 *и пусть*

$$\int_{E_2} \frac{f^2(x)}{q^\tau(x)}\,dx < \infty.$$

Положим

$$c_n = \int_{E_2} f(x)\,\omega_n(x)\,dx.$$

Тогда в каждой точке непрерывности функции $f(x)$ при $s>\beta+1$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{\lambda_n<\lambda}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^s c_n\omega_n(x) = f(x). \quad (7)$$

Наметим кратко доказательство теоремы 2. Мы имеем

$$|c_n| \leqslant \int_{E_2} \frac{|f(x)|}{q^{\tau/2}(x)}\;|\omega_n(x)|\,q^{\tau/2}(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_{E_2}\frac{f^2(x)}{q^\tau(x)}\,dx\right\}^{1/2}\left\{\int_{E_2}\omega_n^2(x)\,q^\tau(x)\,dx\right\} \leqslant C\{a_n^{(\tau)}\}^{1/2}.$$

Поэтому при фиксированном x (см. оценку для $\sum_{\mu<\mu_n\leqslant\mu+1}\omega_n^2(x)$ в работе ([1]), а также оценку (2))

$$\sum_{\mu<\mu_n\leqslant\mu+1}|c_n\omega_n(x)| \leqslant \left\{\sum_{\mu<\mu_n\leqslant\mu+1}c_n^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{\mu<\mu_n\leqslant\mu+1}\omega_n^2(x)\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C\mu\left\{\sum_{\lambda_n<(\mu+1)^2}a_n^{(\tau)}\right\}^{1/2} \leqslant C\mu\left\{\int_{q(x)<(\mu+1)^2} q^\tau(x)\{(\mu+1)^2-q(x)\}^{3/2}dx\right\}^{1/2} =$$

$$= O\{\mu\sigma_\tau[(\mu+1)^2]\}^{1/2} = O(\mu^{\beta+1}). \quad (8)$$

Обозначим через $g_\varepsilon(t)$ функцию, удовлетворяющую условиям: 1) $g_\varepsilon(-t)=g_\varepsilon(t)$; 2) $g_\varepsilon(t)=0$ для $t\geqslant\varepsilon$; 3) существует ограниченная производная $g_\varepsilon^{(p)}(t)$, где $p>\beta+3$.

Положим

$$\psi_\varepsilon(\mu)=\int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t)\cos\mu t\,dt;\quad S(x,\mu)=\sum_{\mu_n<\mu}c_n\omega_n(x).$$

Можно показать ([1]), что имеет место тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\mu-a)\,d_\mu R(x,\mu)=0\quad(0<\varepsilon\leqslant 1).$$

Здесь a — произвольное действительное число;

$$R(x,\mu)=S(x,\mu)-\alpha_1(x,\mu)-\beta_1(x,\mu),$$

$$\alpha_1(x,\mu)=\frac{2}{\pi}\int_0^\mu\nu^2\alpha(x,\nu)\,d\nu,\quad \alpha(x,\nu)=\int_0^1 g(x,t)\cos\nu t\,dt,$$

$$g(x,t)=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{r\leqslant t}\frac{f(\xi)}{r}\,d\xi\quad(r=|x-\xi|);\qquad \beta_1(x,\nu)=\int_0^1\nu^2\beta(x,\nu)\,d\nu,$$

$$\beta(x,\nu)=\int_0^1 h(x,t)\cos\nu t\,dt,\quad h(x,t)=\frac{1}{4\pi}\int_0^t ds\iiint\limits_{r\leqslant s}w(x,\xi;s)\,f(\xi)\,d\xi.$$

Из оценки (8) следует оценка

$$\bigvee_\mu^{\mu+1}\{R(x,\nu)\}=O(\mu^{\beta+1}).$$

Поэтому из теоремы 1.3.3 работы ([6]) следует для $s>\beta+1$

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^\mu\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^s d_\nu R(x,\nu)=0. \tag{9}$$

Далее нетрудно показать, что

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^\mu\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^s d_\nu\beta_1(x,\nu)=0, \tag{10}$$

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^\mu\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^s d_\nu\alpha_1(x,\nu)=f(x). \tag{11}$$

Поэтому (7) следует из (9), (10) и (11).

Замечание. Оценка (2) (а значит и оценка (8)) имеет место если при $\lambda\to\infty$

$$\sigma(\lambda)=\operatorname{mes}\{q(x)<\lambda\}\sim A\lambda^\varkappa\quad(\varkappa>0).$$

В этом случае в неравенстве (3) можно положить $\beta=\tau+\varkappa+{}^3/_2+\varepsilon$, $\alpha=\tau+\varkappa+{}^3/_2-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$.

Артиллерийская инженерная академия
им. Ф. Э. Дзержинского

Поступило
29 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. М. Левитан, Тр. Московск. матем. общ., 4 (1954). [2] E. C. Titchmarsh, Quart. J. Math., 2-d ser., 5, No. 17, 59 (1954). [3] E. C. Titchmarsh, Proc. London Math. Soc. (3), 3, No. 10, 153 (1953). [4] D. Ray, Trans. Am. Math. Soc., 77, 2, 299 (1954). [5] М. В. Келдыш, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, 38, 77 (1951). [6] Б. М. Левитан, Матем. сборн., 35 (77) : 2, 267 (1954).