Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 2

МАТЕМАТИКА

Г. В. ЕПИФАНОВ

О ПЛОТНОСТИ ДВУМЕРНЫХ ПОЛИЭДРОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 30 III 1955)

В статьях Болтянского (1) и Стоуна (2) было показано, что плотность всякого двумерного компакта равна 6 или 7. Стоуном (2) была также выдвинута проблема: определить все двумерные полиэдры плотности 6; при этом было высказано утверждение, что такие полиэдры не должны иметь ребер, к которым примыкают более двух граней. В настоящей заметке предлагается решение поставленной проблемы.

Теорема. *Для того чтобы плотность двумерного полиэдра P была равна* 6, *необходимо и достаточно, чтобы каждая его размерная компонента P_k $(k = 1, \ldots, n)$ имела один из следующих двух видов*: а) *P_k есть псевдомногообразие с непустым краем*; б) *P_k есть псевдомногообразие, получающееся из некоторого многообразия P_k^* склеиванием r точек многообразия P_k^* (всех вместе или частично), причем $0 \leqslant r + s \leqslant 6\chi(P_k^*)$, где $\chi(P_k^*)$ — эйлерова характеристика P_k^* и s — число тех точек $P_k \cap \overline{P \setminus P_k}$, которые имеют в P_k окрестности, гомеоморфные внутренности круга.*

В частности, если P_k — многообразие, это означает, что должно быть $0 \leqslant s \leqslant 6\chi(P_k)$, где s — число точек, из которых состоит $P_k \cap \overline{P \setminus P_k}$.

Доказательство теоремы основано на следующих леммах.

Лемма 1. *Пусть P — двумерное многообразие с непустым краем и $p_1, \ldots, p_m$ — некоторые его точки. Тогда существует такое сколь угодно мелкое покрытие ω многообразия P плотности* 6, *что каждая точка p_i $(i = 1, \ldots, m)$ принадлежит лишь одному элементу ω, причем всякий такой элемент имеет в ω не более* 5 *соседей.*

Лемма 2. *Пусть P — двумерное многообразие с $\chi(P) \geqslant 0$ и $p_1, \ldots, p_m$ — некоторые его (различные) точки. Для того чтобы существовало такое сколь угодно мелкое покрытие ω многообразия P плотности* 6, *что каждая точка p_i $(i = 1, \ldots, m)$ принадлежала бы лишь одному элементу этого покрытия, причем всякий такой элемент имел в ω не более* 5 *соседей, необходимо и достаточно, чтобы $m \leqslant 6\chi(P)$.*

Лемма 3. *Пусть P — двумерный полиэдр, составленный из трех треугольников t_1, t_2, t_3 с общим ребром l. Тогда плотность P равна* 7.

Следствие. Пусть P — двумерный полиэдр. Если P (т. е. какая-либо триангуляция P) имеет ребро, к которому примыкает более двух граней, то плотность P равна 7.

Лемма 4. *Пусть P — двумерный полиэдр, каждая размерная компонента P_k $(k = 1, \ldots, n)$ которого имеет один из следующих*

видов: а) P_k *есть многообразие с непустым краем*; б) P_k *есть многообразие с* $\chi(P_k) \geqslant 0$, *у которого* $P_k \cap \overline{P \setminus P_k}$ *состоит из* s *точек, где* $0 \leqslant s \leqslant 6\chi(P_k)$. *Тогда плотность* P *равна* 6.

Результаты, выраженные приведенной теоремой, показывают, что, по крайней мере для компактов, имеет смысл ввести понятие локальной плотности.

Локальной плотностью (или просто плотностью) компакта Φ в его точке p мы будем называть целое неотрицательное число $l_p = l_p(\Phi)$, удовлетворяющее следующим условиям: а) существует такая окрестность U точки p компакта Φ, что $l_p = l(\overline{U})$, где $l(\overline{U})$ — плотность замыкания $\overline{U}$ окрестности U; б) для всякой окрестности V точки p компакта Φ $l_p \leqslant l(\overline{V})$.

Повидимому, это понятие несколько уточняет связь размерности и плотности.

В частности, для двумерных полиэдров из приведенной теоремы непосредственно получается такое следствие:

Для того чтобы двумерный сильно связный полиэдр имел во всех своих точках плотность, равную 6, *необходимо и достаточно, чтобы он был псевдомногообразием или псевдомногообразием с краем.*

Кишиневский государственный университет

Поступило
28 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Г. Болтянский, ДАН, **75**, № 5, 605 (1950). [2] A. H. Stone, Proc London Math. Soc., **3**, ser. 3, No. 11, 338 (1953).