Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 2

МАТЕМАТИКА

Я. Л. ГЕРОНИМУС

О НЕКОТОРЫХ ЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 2 IV 1955)

В заметке ([1]) мы вывели условия, достаточные для ограниченности системы ортогональных многочленов на всем интервале ортогональности; в настоящей заметке мы даем локальные условия ограниченности — в данной точке или на данном подъинтервале *.

1. Теорема 1. *Пусть многочлены* $\{\hat{P}_n(z)\}$ *ортонормальны на единичной окружности относительно обложения* $d\sigma(\varphi)$, *где* $\sigma(\varphi)$ *не убывает и удовлетворяет двум условиям*: 1) $\lg \sigma'(\varphi) \in L$; 2) *на отрезке* $l \subset [0, 2\pi]$ *функция* $\sigma(\varphi)$ *абсолютно непрерывна, причем* $p(\varphi) = \sigma'(\varphi) \geqslant m > 0$ *и* $p(\varphi) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $1/2 < \alpha \leqslant 1$; *тогда в каждой точке* φ_0 *отрезка* l_0, *лежащего внутри* l, *имеем* $\{|\hat{P}_n(e^{i\varphi_0})|\}_0^\infty \leqslant A$.

Для доказательства вводим функцию $\pi(z)$ (см. ([1]), формула (8)) и показываем прежде всего, что всюду на дуге $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in l$, она имеет радиальные граничные значения $\pi(e^{i\varphi})$, причем граничная функция $\pi(e^{i\varphi})$ имеет на отрезке l', лежащем внутри l, модуль непрерывности порядка $O(\delta^\alpha)$ при $\alpha < 1$ и $O(\delta \lg \delta)$ при $\alpha = 1$. Вводим функцию $\pi_0(\varphi) = \pi(e^{i\varphi})$, $\varphi \in E$, и $\pi_0(\varphi) = 0$, $\varphi \in \overline{E}$, где $E \subset [0, 2\pi]$ — множество точек, в которых одновременно существуют $\pi(e^{i\varphi})$ и $\sigma'(\varphi) > 0$; ясно, что $\mathrm{mes}\, E = 2\pi$ и что $l \subset E$.

Легко видеть, что для $\varphi_0 \in l_0$, где l_0 лежит внутри l', существует интеграл

$$\int_0^{2\pi} |f(\varphi)|^2 d\sigma(\varphi) < \infty, \qquad f(\varphi) = \frac{\pi_0(\varphi) - \pi_0(\varphi_0)}{e^{i\varphi} - e^{i\varphi_0}}. \tag{1}$$

Пользуясь формулой Кристоффеля — Дарбу, находим для $\varphi_0 \in l_0$, $n = 0, 1, \ldots$,

$$\hat{P}_n^*(e^{i\varphi_0}) \frac{\hat{P}_n^*(0)}{\pi(0)} - \pi(e^{i\varphi_0}) = I_1^{(n)} \hat{P}_n^*(e^{i\varphi_0}) - I_2^{(n)} e^{i\varphi_0} \hat{P}_n(e^{i\varphi_0}),$$

$$I_1^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} f(\varphi) \overline{\hat{P}_n^*(e^{i\varphi})}\, d\sigma(\varphi), \quad I_2^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \overline{\hat{P}_n(e^{i\varphi})}\, d\sigma(\varphi); \tag{2}$$

$I_2^{(n)}$ стремится к нулю вместе с $1/n$ благодаря (1) и неравенству Бесселя; для $I_1^{(n)}$ имеем, полагая $d\sigma(\varphi) = p(\varphi)\, d\varphi + d\sigma_1(\varphi)$:

---

* Мы будем пользоваться обозначениями ([1]).

$$I_1^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} f(\varphi)}{\pi(e^{i\varphi})}\left\{\overline{\frac{\hat{P}_n^*(e^{i\varphi})}{\pi(e^{i\varphi})}} - 1\right\} d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} f(\varphi)}{\pi(e^{i\varphi})}\, d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\varphi} f(\varphi)\,\overline{\hat{P}_n^*(e^{i\varphi})}\, d\sigma_1(\varphi). \tag{3}$$

Пользуясь очевидным неравенством

$$0 < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\hat{P}_n^*(e^{i\varphi})}{\pi(e^{i\varphi})} - 1\right|^2 d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\hat{P}_n^*(e^{i\varphi})|^2 p(\varphi)\, d\varphi - 2\frac{\hat{P}_n^*(0)}{\pi(0)} + 1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\hat{P}_n^*(e^{i\varphi})|^2 d\sigma(\varphi) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\hat{P}_n^*(e^{i\varphi})|^2 d\sigma_1(\varphi) - 2\frac{\hat{P}_n^*(0)}{\pi(0)} + 1 =$$

$$= 2\left[1 - \frac{\hat{P}_n^*(0)}{\pi(0)}\right] - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\hat{P}_n^*(e^{i\varphi})|^2 d\sigma_1(\varphi) \leqslant 2\left[1 - \frac{\hat{P}_n^*(0)}{\pi(0)}\right] \tag{4}$$

и применяя к первому и третьему интегралам (3) неравенство Буняковского — Шварца, видим, что они стремятся к нулю, ибо $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{P}_n^*(z) = \pi(z)$, $|z| < 1$; второй интеграл, как легко видеть, равен нулю, так как $\frac{1}{\pi(z)} \in H_2$.

Мы имеем из (2):

$$\left|\hat{P}_n^*(e^{i\varphi_0})\,\frac{\hat{P}_n^*(0)}{\pi(0)} - \pi(e^{i\varphi_0})\right| \leqslant |\hat{P}_n^*(e^{i\varphi_0})|\,\varepsilon_n, \quad \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0, \tag{5}$$

откуда вытекает $\{|\hat{P}_n(e^{i\varphi_0})|\}_0^\infty \leqslant A$, ибо $|\pi(e^{i\varphi_0})| = \frac{1}{\sqrt{\rho(\varphi_0)}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{m}}$.

Примечание. В том случае, когда функция $\sigma(\varphi)$ абсолютно непрерывна, существование предела

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\hat{P}_n^*(e^{i\varphi})}{\pi(e^{i\varphi})} - 1\right|^2 d\varphi = 0 \tag{6}$$

было доказано В. И. Смирновым [5].

Теорема 2. *При условиях предыдущей теоремы справедлива асимптотическая формула* *

$$\lim_{n\to\infty} \hat{P}_n^*(e^{i\varphi_0}) = \pi(e^{i\varphi_0}), \quad \varphi_0 \in I_0. \tag{7}$$

Доказательство сразу вытекает из (5).

2. Рассмотрим теперь многочлены $\{\varphi_n(x)\}$, ортонормальные на отрезке $[-1, +1]$ относительно обложения $d\psi(x)$.

---

* Асимптотическая формула (7) при локальных условиях впервые выведена Сегё [2,3] при более ограничительных условиях, наложенных на вес, чем условие теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть обложение удовлетворяет условию*

$$\int_{-1}^{1} \frac{\lg w(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} > -\infty, \quad w(x) = \psi'(x), \tag{8}$$

и пусть на отрезке l, лежащем внутри $[-1, +1]$, функция $\psi(x)$ абсолютно непрерывна, причем $w(x) \geqslant m > 0$ и $w(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$, $1/2 < \alpha \leqslant 1$; тогда в каждой точке x_0 отрезка l_0, лежащего внутри l, имеем $\{|\hat{\varphi}_n(x_0)|\}_0^\infty \leqslant B$; этот же вывод справедлив, если отрезок l имеет одним из концов точку $x_0 = \pm 1$ и если на l тригонометрический вес $t(x) = w(x)\sqrt{1-x^2}$ удовлетворяет условиям $t(x) \geqslant m > 0$ и $t(x) \in \operatorname{Lip}\gamma$, $1/4 < \gamma \leqslant 1/2$.

Доказательство вытекает из теоремы 1, если воспользоваться формулой (20) (1).

Теорема 4. *При условиях предыдущей теоремы справедлива асимптотическая формула* *

$$\hat{\varphi}_n(\cos\alpha_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(n\alpha_0 - \lambda_0)}{\sqrt{t(\cos\alpha_0)}} + \varepsilon_n, \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0, \quad \lambda_0 = \arg\pi(e^{i\alpha_0}). \tag{9}$$

3. Рассмотрим теоремы, являющиеся локальным видоизменением известной теоремы Корауса (4).

Теорема 5. *Пусть системы многочленов $\{\hat{\varphi}_n^{(1)}(x)\}$, $\{\hat{\varphi}_n^{(2)}(x)\}$ ортонормальны на отрезке $[-1, +1]$ относительно обложений $d\psi^{(1)}(x)$ и $d\psi^{(2)}(x)$, причем*

$$d\psi^{(2)}(x) = k(x)\,d\psi^{(1)}(x), \quad 0 < m \leqslant k(x) \leqslant M, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1; \tag{10}$$

пусть на отрезке $l \subset [-1, +1]$ $k(x) \in \operatorname{Lip} 1$; тогда, если в точке x_0, лежащей внутри l, имеем $\{|\hat{\varphi}_n^{(1)}(x_0)|\}_0^\infty \leqslant C_1$, то $\{|\hat{\varphi}_n^{(2)}(x_0)|\}_0^\infty \leqslant C_2$.

Чтобы показать справедливость этого утверждения, достаточно в доказательстве Корауса разбить каждый интеграл на два — по отрезку l и по $\bar{l}$, где $l + \bar{l} = [-1, +1]$.

Аналогично доказывается

Теорема 6. *Пусть $k(x)$ удовлетворяет условию (10) и пусть на отрезке $l \subset [-1, +1]$ имеем*

$$d\psi^{(1)}(x) = w(x)\,dx, \quad w(x) \leqslant C, \quad k(x) \in \operatorname{Lip}\alpha, \quad 1/2 < \alpha \leqslant 1; \tag{11}$$

тогда, если $\{|\hat{\varphi}_n^{(1)}(x)|\}_0^\infty \leqslant C_1$, $x \in l$, то $\{|\hat{\varphi}_n^{(2)}(x_0)|\}_0^\infty \leqslant C_2$ для x_0 внутри l.

4. Предыдущие теоремы позволяют установить некоторые локальные условия, достаточные для теорем В. А. Стеклова, Д. Джексона и др. о сходимости разложений Фурье — Чебышева.

Теорема 7. *Пусть многочлены $\{\hat{\varphi}_n(x)\}$, ортонормальные относительно обложения $d\psi(x)$, ограничены в точке x_0; пусть на отрезке l, внутри которого лежит x_0, имеем $d\psi(x) = w(x)\,dx$, $w(x) \leqslant C$; пусть функция $f(x)$, для которой*

$$\int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2\,d\psi(x) < \infty, \tag{12}$$

---

* Эта формула также найдена Сегё (2,3) при более ограничительных условиях.

удовлетворяет на l условию Липшица, причем $^1/_2 < \alpha \leqslant 1$; *тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k \hat{\varphi}_k(x_0) = f(x_0), \quad c_k = \int_{-1}^{1} f(x)\hat{\varphi}_k(x)\,d\psi(x) \quad (k = 0, 1, \ldots); \qquad (13)$$

если же многочлены $\{\hat{\varphi}_n(x)\}$ *ограничены на всем отрезке* l *и если функция* $f(x)$ *удовлетворяет на* l *условию Дини — Липшица*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant N\,|\lg|x_1 - x_2||^{-1-\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad x_1, x_2 \in l,$$

то (13) *справедливо во всех точках* x_0, *лежащих внутри* l.

Харьковский авиационный
институт

Поступило
1 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Л. Геронимус, ДАН, **83**, № 1 (1952). [2] G. Szegö, Orthogonal Polynomials. N. Y., 1939. [3] G. Szegö, Math. Ann., **86**, 188 (1922). [4] J. Korous, Rozpr. České Akad. (2), **48**, 12 (1938). [5] В. И. Смирнов, Изв. АН СССР, ОМЕН, 337 (1932).