Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 2

МАТЕМАТИКА

Б. Ф. БЫЛОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СВЕРХУ НАИБОЛЬШЕГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОКАЗАТЕЛЯ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 28 III 1955)

Дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{ii}(t)\,x_i + F_i(t,\ x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1,\ 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где функции F_i непрерывны при $t \geqslant 0$ и удовлетворяют условиям

$$|F_i(t,\ x_1, \ldots, x_n) - F_i(t,\ \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)| \leqslant \delta \sum_{j=1}^{n} |x_j - \bar{x}_j|,$$

$$F_i(t,\ 0, \ldots, 0) \equiv 0 \quad (i = 1,\ 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Предположим, что система первого приближения $dx_i/dt = p_{ii}(t)\,x_i$ правильная и введем обозначения

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t p_{ii}(\xi)\,d\xi = \lambda_i, \quad \max \lambda_i = \Lambda, \quad \sup_{(i,\,t)} |p_{ii}(t)| = \bar{p}.$$

Назовем Λ устойчивым сверху наибольшим характеристичным показателем, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любых F_i, удовлетворяющих условиям (2), характеристичный показатель любого решения системы (1) не превосходит $\Lambda + \varepsilon$.

Теорема. *Для устойчивости сверху наибольшего характеристичного показателя Λ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\alpha > 0$ и любой непрерывной и ограниченной функции $g(t)$ такой, что* $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t g(\xi)\,d\xi = \Lambda$, *существовали такие константа $C(\alpha)$ и функция $f_\alpha(t)$* $\left(\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t f_\alpha(\xi)\,d\xi \leqslant \alpha\right)$, *соответствующие выбранным α и $g(t)$, что*

$$\exp\left\{\int_\tau^t [p_{ii}(\xi) - g(\xi)]\,d\xi\right\} \leqslant C(\alpha)\exp\left\{\alpha(t-\tau) + \int_\tau^t f_\alpha(\xi)\,d\xi\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

при любых $t \geqslant \tau \geqslant 0$.

Достаточность устанавливается без труда. Заметим, что из выполнения условий (3) для какой-либо одной функции $g(t)$ следует их выполнение для любой другой функции при других, вообще говоря,

$C(\alpha)$ и $f_\alpha(t)$. Поэтому, предположив, что условия (3) не выполняются, можно считать, что они не выполнены при $g(t) = p_{kk}(t)$ ($\lambda_k = \Lambda$).

Зададим произвольные $\alpha > 0$ и $T > 0$. Пусть $T_0 = 0$, $T_i - T_{i-1} = T$, $[T_{i-1}, T_i] = \Delta_i$ ($i = 1, 2, \ldots$).

Рассмотрим интеграл $\int_0^t (p_{rr} - p_{kk})\, d\xi$. Назовем Δ_i отрезком первого (второго) рода, если $\int_{\Delta_i} (p_{rr} - p_{kk})\, d\xi < \alpha T$ $\left(\int_{\Delta_i} (p_{rr} - p_{kk})\, d\xi \geqslant \alpha T\right)$.

Для каждого $r = 1, 2, \ldots, n$ получим последовательности отрезков первого и второго родов $\{\Delta^{(1)}_{\mu r}\}$ и $\{\Delta^{(2)}_{\nu r}\}$. Определим функции $f_r^{(\alpha, T)}(t)$ и $P_r^{(\alpha, T)}(t)$:

$$f_r^{(\alpha, T)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \subset \sum_\mu \Delta^{(1)}_{\mu r}, \\ p_{rr}(t) - p_{kk}(t) & \text{при } t \subset \sum_\nu \Delta^{(2)}_{\nu r}; \end{cases}$$

$$P_r^{(\alpha, T)}(t) = p_{rr}(t) - p_{kk}(t) - f_r^{(\alpha, T)}(t).$$

Очевидно, что при $t \geqslant \tau \geqslant 0$

$$\int_\tau^t (p_{rr} - p_{kk})\, d\xi = \int_\tau^t P_r^{(\alpha, T)}(\xi) d\xi + \int_\tau^t f_r^{(\alpha, T)}(\xi)\, d\xi,$$

$$\int_\tau^t P_r^{(\alpha, T)}(\xi)\, d\xi \leqslant \alpha(t - \tau) + 4\bar{p}T, \quad \int_\tau^t f_r^{(\alpha, T)}(\xi)\, d\xi \geqslant -4\bar{p}T. \tag{4}$$

Пусть $\gamma_\alpha = \inf_T \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t f_r^{(\alpha, T)}(\xi)\, d\xi$. В силу (4) $\gamma_\alpha \geqslant 0$. Если бы оказалось, что при любых α и $r = 1, 2, \ldots, n$ $\gamma_\alpha = 0$, то, выбирая $T_r(\alpha)$ так, чтобы выполнялись неравенства $\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t f_r^{(\alpha, T_r)}(\xi)\, d\xi \leqslant \frac{\alpha}{n}$, полагая затем $f_\alpha(t) = \sum_{r=1}^n f_r^{(\alpha, T_r)}(t)$ и используя (4), мы получили бы, что

$$\exp\left[\int_\tau^t (p_{rr} - p_{kk})\, d\xi\right] \leqslant \exp[4pn\bar{T}] \exp\left[\alpha(t - \tau) + \int_\tau^t f_\alpha(\xi)\, d\xi\right] \left(\bar{T} = \max_r T_r(\alpha)\right)$$

($r = 1, 2, \ldots, n$), а это, очевидно, противоречит сделанному предположению. Следовательно, при некоторых α и r и любых T

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t f_r^{(\alpha, T)}(\xi)\, d\xi > 2\gamma > 0.$$

Тогда для указанных α и r при любых T существует такая последовательность $\bar{t}_m \to \infty$, что

$$\int_0^{\bar{t}_m} f_r^{(\alpha, T)}(\xi)\, d\xi > \gamma \bar{t}_m.$$

Легко проверить, что точки $\bar{t}_m$ можно считать совпадающими с правыми концами некоторых отрезков второго рода.

Зададим любое $\delta > 0$ и определим функции $F_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ следующим образом:

$$F_i = 0, \quad \text{если } i \neq r,\ i \neq k; \quad F_r = \delta x_k, \quad F_k = \delta x_r.$$

Система (1) в этом случае содержит независимую систему двух уравнений. Преобразование $x_i = y_i \exp \int p_{kk}(\xi)\, d\xi$ переводит ее в систему

$$\frac{dy_k}{dt} = \delta y_r, \quad \frac{dy_r}{dt} = (p_{rr} - p_{kk})\, y_r + \delta y_k.$$

Заменяя последнюю системой интегральных уравнений, ищем решение методом последовательных приближений, полагая

$$y_k^{(0)} = 1, \quad y_r^{(0)} = 0,$$

$$y_k^{(m+1)} = 1 + \delta \int_0^t y_r^{(m)}(\tau)\, d\tau, \quad y_r^{(m+1)} = \delta \int_0^t \exp\left[\int_\tau^t (p_{rr} - p_{kk})\, d\xi\right] y_k^{(m)}(\tau)\, d\tau.$$

Перенося на общий случай метод, предложенный Р. Э. Виноградом [1], последовательные приближения представляем в виде

$$y_k^{(2m+1)} = y_k^{(2m)} = 1 + \sum_{s=1}^{m} \delta^{2s} I_s(t),$$

$$y_r^{(2m)} = y_r^{(2m-1)} = \sum_{s=1}^{m} \delta^{2s-1} J_s(t),$$

где положено:

$$I_s(t) = \int_0^t \int_0^{t_{2s-1}} \ldots \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \exp\left[\int_{t_0}^{t_1} (p_{rr} - p_{kk})\, d\xi + \int_{t_2}^{t_3} (p_{rr} - p_{kk})\, d\xi + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \int_{t_{2s-2}}^{t_{2s-1}} (p_{rr} - p_{kk})\, d\xi\right] dt_0\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_{2s-1};$$

$$J_s(t) = \int_0^t \int_0^{t_{2s-2}} \ldots \int_0^{t_1} \exp\left[\int_{t_0}^{t} (p_{rr} - p_{kk})\, d\xi + \int_{t_2}^{t_3} (p_{rr} - p_{kk})\, d\xi + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \int_{t_{2s-2}}^{t} (p_{rr} - p_{kk})\, d\xi\right] dt_0\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_{2s-2}.$$

Пусть $\{T_i^{(2)}\}$ есть последовательность концов отрезков второго рода при некотором $T > 2$, а s_m — число отрезков второго рода, лежащих на отрезке $[0, \bar{t}_m]$. Сужая область интегрирования в $I_{s_m}(\bar{t}_m)$ до куба K_{2s_m}, определенного неравенствами

$$T_0^{(2)} \leqslant t_0 \leqslant T_0^{(2)} + 1,$$
$$T_1^{(2)} - 1 \leqslant t_1 \leqslant T_1^{(2)},$$
$$T_2^{(2)} \leqslant t_2 \leqslant T_2^{(2)} + 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$T_{2s_m-2}^{(2)} \leqslant t_{2s_m-2} \leqslant T_{2s_m-2}^{(2)} + 1,$$
$$T_{2s_m-1}^{(2)} - 1 \leqslant t_{2s_m-1} \leqslant T_{2s_m-1}^{(2)} = \bar{t}_m,$$

с объемом, равным 1, и учитывая, что для $(t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{2s_m-1}) \subset K_{2s_m}$

$$\int_{t_0}^{t_1} (p_{rr} - p_{kk})\, d\xi + \int_{t_2}^{t_3} (p_{rr} - p_{kk})\, d\xi + \ldots + \int_{t_{2s_m-2}}^{t_{2s_m-1}} (p_{rr} - p_{kk})\, d\xi \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{\bar{t}_m} f_r^{(\alpha, T)}(\xi)\, d\xi - 4s_m \bar{p},$$

имеем на основании предыдущего

$$y_k(\bar{t}_m) \geqslant y_k^{(2s_m)}(\bar{t}_m) \geqslant \delta^{2s_m} I_{s_m}(\bar{t}_m) \geqslant$$

$$\geqslant \exp\left[\int_0^{\bar{t}_m} f_r^{(\alpha, T)}(\xi)\, d\xi - 2s_m |\ln \delta - 2\bar{p}|\right] \geqslant \exp\left[\bar{t}_m \left(\gamma - \frac{2|\ln \delta - 2\bar{p}|}{T}\right)\right].$$

Так как T можно считать как угодно большим, то характеристичный показатель y_k не меньше γ. Возвращаясь к системе (1), мы получим решение с характеристичным показателем, не меньшим $\Lambda + \gamma$, откуда следует необходимость условий (3), так как γ не зависит от δ.

Если система первого приближения правильная и имеет общий вид, то оказывается, что при приведении ее к треугольному виду выполнение для диагональных коэффициентов условий (3) эквивалентно выполнению условия

$$\| X(t) X^{-1}(\tau) \| \leqslant C_1(\alpha) \exp\left[(\Lambda + \alpha)(t - \tau) + \int_\tau^t f_\alpha(\xi) d\xi\right]$$

($X(t)$ — фундаментальная система решений уравнений первого приближения), которое является достаточным для устойчивости Λ в общем случае.

Бежицкий институт
транспортного машиностроения

Поступило
28 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Э. Виноград, ДАН, **91**, № 5 (1953).