Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 3

ГЕОФИЗИКА

П. С. ЛИНЕЙКИН

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТОЛЩИНЫ БАРОКЛИННОГО СЛОЯ МОРЯ

(Представлено академиком В. В. Шулейкиным 29 VII 1954)

Определение толщины бароклинного слоя моря имеет важнейшее значение для теоретической и практической динамики моря. В частности, с этим вопросом тесно связан выбор «нулевой поверхности» при определении скоростей течения динамическим методом. Мы предлагаем здесь гидродинамическую теорию ветровых течений в море, которая, хотя и значительно схематизирует процесс, но сохраняет его главные черты и позволяет выявить неизвестные ранее характеристики полей скорости и плотности жидкости.

Возмущения, обусловленные воздействием ветра и течений в полях температуры и солености в море в условиях рассматриваемой ниже задачи, предполагаются столь малыми, что плотность морской воды можно представить линейной функцией указанных переменных. Отсюда, а также вследствие приближенного равенства коэффициентов турбулентного теплообмена и солевого обмена в море можно заключить, что плотность жидкости в свою очередь подчиняется уравнению турбулентной диффузии. Мы принимаем далее, что коэффициенты плотностной диффузии совпадают с соответствующими значениями коэффициентов горизонтального (μ_x) и вертикального (μ_z) обмена количеством движения в море.

Рассмотрим течения, возбуждаемые ветром в бесконечно глубоком канале, ограниченном отвесными параллельными стенками. Пусть в начальный момент свободная поверхность моря горизонтальна, течения отсутствуют, а плотность морской воды линейно возрастает по вертикали (ось Oz). Поле ветра примем неизменным вдоль прямых, параллельных берегу канала (ось Oy). Тогда неизвестные проекции скорости u, v, w, давление жидкости p, плотность ρ и уровень ζ (возвышению соответствует $\zeta<0$!) не будут зависеть от y.

Основные уравнения задачи имеют вид:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)-2\omega_z\rho v=\mu_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mu_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial p}{\partial x}; \tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)+2\omega_z\rho u=\mu_x\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\mu_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}; \tag{2}$$

$$0=g\rho-\frac{\partial p}{\partial z}; \tag{3}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho w}{\partial z}=0; \tag{4}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}=\mu_x\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+\mu_z\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}. \tag{5}$$

Формулируем краевые условия:

при $t=0$: $$u=v=w=\zeta=0, \quad \rho=\rho_*=\rho_0(1+bz); \tag{6}$$

при $z=\zeta$: $$\mu_z\frac{\partial u}{\partial z}=-T_x, \quad \mu_z\frac{\partial v}{\partial z}=-T_y,$$

$$p=p_a, \quad w=\frac{d\zeta}{dt}, \quad \frac{d\rho}{dz}=\rho_0 b; \tag{7}$$

при $x=0,\ L$: $$u=v=0, \quad \frac{\partial\rho}{\partial x}=0; \tag{8}$$

при $z\to\infty$: $$u\to 0, \quad v\to 0, \quad w\to 0, \quad \rho-\rho_*\to 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x}\to 0. \tag{9}$$

Последнее из условий (7) основано на допущении, что ветер и течения не меняют тепловых процессов на поверхности моря.

Заметим, что давление сразу же исключается из уравнений задачи при помощи (3), (7), (9). Вместе с тем находим выражение для уровня:

$$\zeta=\frac{1}{\rho_0}\int_0^\infty(\rho-\rho_*)dz. \tag{10}$$

Полагая возмущение плотности $\rho-\rho_*$ малым сравнительно с ρ_* (которое в свою очередь мало отличается от ρ_0) и $\partial\rho/\partial z$ мало отличающимся от значения b, мы упрощаем задачу, линеаризируя уравнения, заменяя $d\zeta/dt$ на $\partial\zeta/\partial t$ и принимая условия (7) не при $z=\zeta$, но при $z=0$. Допущенные пренебрежения впоследствии оцениваются по результатам расчета и оправдываются по крайней мере для точек, расположенных ниже «глубины трения» (по Экману).

В дальнейшем удобно ввести безразмерные переменные, полагая $x=L\bar{x}$, $z=h_0\bar{z}$, $\zeta=h_0\bar{\zeta}$, $t=\tau\bar{t}$, $\rho-\rho_*=\rho_0\delta$, $u=u_0\bar{u}$, $v=u_0\bar{v}$, $w=w_0\bar{w}$, $T_x=T_0X$, $T_y=T_0Y$, где L и ρ_0 известны, T_0 — характерная величина напряжения ветра, а остальные характерные величины выбираются так:

$$h_0=\sqrt{\mu_z/\mu_x}, \quad \tau=\sqrt{\mu_x\mu_z}/T_0, \quad u_0=LT_0/\sqrt{\mu_x\mu_z}, \quad w_0=LT_0/\mu_x. \tag{11}$$

Введем также следующие параметры:

$$c=2\omega_z\sqrt{\mu_x\mu_z}/T_0, \quad a=g\mu_z\sqrt{\mu_x\mu_z}/LT_0^2,$$

$$\lambda=\mu_x\sqrt{\mu_x\mu_z}/\rho_0L^2T_0, \quad \gamma=bL\sqrt{\frac{\mu_z}{\mu_x}}. \tag{12}$$

Тогда задача приводится к решению линейной системы

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}}-c\bar{v}=\lambda\nabla^2\bar{u}-a\int_\infty^{\bar{z}}\frac{\partial\bar{\delta}}{\partial\bar{x}}d\bar{z}, \quad \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{t}}+c\bar{u}=\lambda\nabla^2\bar{v}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial\bar{\delta}}{\partial\bar{t}}+\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{z}}+\gamma\bar{w}=0, \quad \frac{\partial\bar{\delta}}{\partial\bar{t}}+\gamma\bar{w}=\lambda\nabla^2\bar{\delta} \tag{14}$$

при следующих краевых условиях:

$$\bar{t}=0: \quad \bar{u}=\bar{v}=\bar{w}=\bar{\delta}=0;$$

$$\bar{z}=0: \quad \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{z}}=-X, \quad \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{z}}=-Y, \quad \bar{w}=\int_0^\infty\frac{\partial\bar{\delta}}{\partial\bar{t}}d\bar{z}, \quad \frac{\partial\bar{\delta}}{\partial\bar{z}}=0, \tag{15}$$

$$\bar{x}=0,1: \quad \bar{u}=\bar{v}=0, \quad \frac{\partial\bar{\delta}}{\partial\bar{x}}=0; \quad \bar{z}\to\infty: \quad \bar{u},\ \bar{v},\ \bar{w},\ \bar{\delta}\to 0.$$

Пусть известны разложения X, Y в ряды Фурье:

$$X=\sum_{n=1}^\infty X_n\sin n\pi x, \quad Y=\sum_{n=1}^\infty Y_n\sin n\pi x. \tag{16}$$

Естественно искать решения для $\bar{u}$, $\bar{v}$ в виде аналогичных рядов по синусам, а для $\bar{w}$, $\bar{\delta}$, $\bar{\zeta}$ — по косинусам аргумента $n\pi x$. Перейдем еще к операционным преобразованиям искомых переменных (по t), сохраняя для изображений те же обозначения, что и для оригиналов. Тогда для совокупности коэффициентов рядов Фурье u_n, v_n, w_n, δ_n, ζ_n на основе (14) и (15) можно составить систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Полагая первые четыре неизвестных пропорциональными $e^{-k\bar{z}}$, получим для k характеристическое уравнение 8-й степени. Заметим, что при значениях основных параметров, соответствующих реальным условиям ($L = 100$ км, $\mu_x = 10^8$ г/см·сек, $\mu_z = 10^2$ г/см·сек, $\omega_z = 5 \cdot 10^{-5}$ сек$^{-1}$, $T_0 = 3$ г/см·сек^2, $b = 10^{-3} \cdot 1/100$ м), имеем $h_0 = 100$ м, $\tau = 0{,}39$ суток, $u_0 = 3 \cdot 10^2$ см/сек, $w_0 = 3 \cdot 10^{-1}$ см/сек, $c = 3{,}3$, $a = 1,\ 1 \cdot 10^2$, $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^{-2}$ и $\gamma = 10^{-3}$.

Пользуясь малостью параметра γ, можно найти следующие приближенные значения 4 корней характеристического уравнения задачи:

$$k_1 = n\pi \sqrt{\frac{\gamma a}{p_1^2 + c^2}}, \quad k_3 = \sqrt{\frac{p_1}{\lambda}}, \quad k_5 = \sqrt{\frac{p_1 + ci}{\lambda}}, \quad k_7 = \sqrt{\frac{p_1 - ci}{\lambda}}. \tag{17}$$

Здесь p_1 отличается слагаемым от параметра p употребляемого операционного преобразования: $p_1 = p + n^2\pi^2\lambda$. Остальные 4 корня имеют отрицательную действительную часть и не могут быть использованы.

Оставляя исследование неустановившегося движения предметом отдельной работы, мы рассмотрим здесь предельное установившееся состояние полей скорости и плотности при постоянных относительно времени значениях X, Y. Такому установившемуся состоянию соответствует, очевидно, $p = 0$, т. е. $p_1 = n^2\pi^2\lambda$.

Пользуясь обозначениями $\sqrt{p_1 + ci} = \alpha + \beta i = re^{\psi i}$, $X_n + iY_n = Re^{i\varphi}$, можно получить приближенные выражения неизвестных величин задачи в следующей форме:

$$\delta_n = \frac{\gamma}{n\pi} \frac{p_1 X_n + cY_n}{r^4} e^{-n\pi\sqrt{\gamma\alpha}\,\bar{z}/r^2} + \frac{\gamma\sqrt{\lambda}(\beta X_n - \alpha Y_n)e^{-n\pi\bar{z}}}{cr^2} + \\ + \frac{n\pi\gamma\lambda}{c} \frac{R_n}{r^2} e^{-\alpha\bar{z}/\sqrt{\lambda}} \sin\left(\varphi - 2\psi - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\bar{z}\right), \tag{18}$$

$$u_n = -n\pi\lambda\sqrt{\gamma a} \frac{p_1 X_n + cY_n}{r^6} e^{-n\pi\sqrt{\gamma\alpha}\,\bar{z}/r^2} + \frac{\sqrt{\lambda}}{r} Re^{-\alpha\bar{z}/\sqrt{\lambda}} \cos\left(\varphi - \psi - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\bar{z}\right), \tag{19}$$

$$v_n = \frac{c}{n\pi}\sqrt{\gamma a} \frac{p_1 X_n + cY_n}{r^6} e^{-n\pi\sqrt{\gamma\alpha}\,\bar{z}/r^2} + \frac{\sqrt{\lambda}}{r} Re^{-\alpha\bar{z}/\sqrt{\lambda}} \sin\left(\varphi - \psi - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\bar{z}\right), \tag{20}$$

$$w_n = -n\pi\lambda \frac{p_1 X_n + cY_n}{r^4} e^{-n\pi\sqrt{\gamma a}\,\bar{z}/r^2} + n\pi\lambda \frac{R}{r^2} e^{-\alpha\bar{z}/\sqrt{\lambda}} \cos\left(\varphi - 2\psi - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\bar{z}\right), \tag{21}$$

$$\zeta_n = \frac{\sqrt{\gamma}}{n^2\pi^2} \frac{p_1 X_n + cY_n}{\sqrt{a}\, r^2} + \frac{\gamma\sqrt{\lambda}}{n\pi c} \frac{\beta X_n - \alpha Y_n}{r^2} + \frac{n\pi\gamma\lambda^{3/2}}{c} \frac{R}{r^3} \cos(\varphi - 3\psi). \tag{22}$$

Установившиеся течения, возбуждаемые ветром, состоят, согласно формулам (19)—(21), из двух составляющих, затухающих с глубиной по экспоненциальному закону. Одна из них представлена первыми членами указанных формул, причем присутствие $\sqrt{\gamma}$ свидетельствует о связи соответствующих скоростей с распределением плотности. Таким образом выявляются градиентно-конвекционные течения, являющиеся вторичным эффектом ветра. Другая составляющая, представленная вторыми членами в (19)—(21), определяет чисто дрейфовые тече-

ния, немного отличающиеся от экмановских течений вследствие горизонтального турбулентного обмена в море. Мерой затухания этих течений с глубиной является, как известно, «глубина трения» $z = D$, для которой $e^{-\alpha D_n/\sqrt{\lambda}} = e^{-\pi} = 0{,}043$, т. е. $D_n = \pi\sqrt{\lambda}/\alpha$. Аналогично этому естественно определить глубину слоя градиентно-конвекционных течений условием $e^{-n\pi\sqrt{\gamma a}H_n/r^2} = e^{-\pi}$, откуда $H_n = r_n^2/n\sqrt{\gamma a}$.

Легко показать, что значения D_n монотонно убывают с ростом номера n, тогда как H_n имеет минимум при $n_* \sim \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{c}{\lambda}}$ (практически $n_* \sim 3-4$). Однако градиентно-конвекционные слагаемые в u_n, v_n, w_n, δ_n даже при $z = 0$ так быстро убывают с ростом n, что при $n > n_*$ они практически не играют роли. Таким образом, основное значение имеют величины

$$D_1 = \pi\sqrt{\lambda}/\alpha_1 \sim \pi\sqrt{2\lambda/c}, \quad H_1 = r_1^2/\sqrt{\gamma a} \sim c/\sqrt{\gamma a},$$

или в размерных единицах

$$D_1 = \sqrt{\frac{\mu_z}{\sqrt{\rho^2\omega_z^2/\pi^4 + \mu_x^2/4L^4} + \mu_x/2L^2}} \sim \pi\sqrt{\mu_z/\rho\omega_z}; \tag{23}$$

$$H_1 = L\sqrt{\frac{4\omega_z^2}{bg} + \frac{\pi^4\mu_x^2}{bg\rho^2L^4}} \sim \frac{2\omega_z L}{\sqrt{bg}}. \tag{24}$$

Последняя величина и определяет толщину бароклинного слоя моря которая превосходит экмановскую глубину трения D_1 при принятых значениях параметров примерно в 22 раза ($H_1 \sim 1000$ м, $D_1 \sim 45$ м). Заметим, что при $z = 0$ $v_{\text{конв}}$ составляет около $^1/_3$ от $v_{\text{дрейф}}$, так что ни абсолютным ни относительным значением скорости градиентно-конвекционных течений нельзя пренебрегать даже в поверхностном слое моря, где чисто дрейфовые течения играют основную роль. Разумеется, можно предложить также иные критерии (и соответствующие формулы) для нижней границы бароклинного слоя в море.

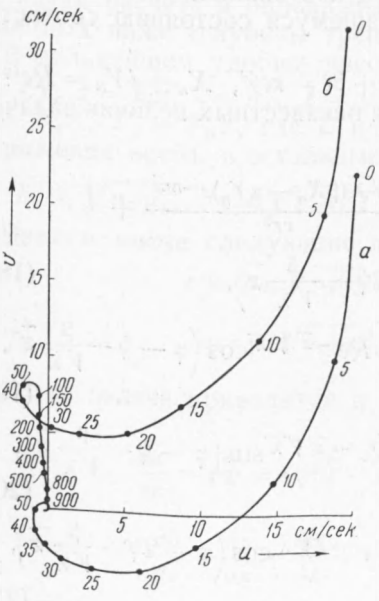


Рис. 1

Таким образом, мы в состоянии теперь составить необходимые количественные характеристики градиентно-конвекционных течений, вызванных ветром. Важная роль этих течений в динамике моря была указана ранее в общих чертах В. Б. Штокманом (1).

На рис. 1 (кривая *а*) представлен (в плане) годограф скорости течения на оси канала на разных глубинах (в метрах). Для сравнения приведен аналогичный годограф для чисто дрейфовых течений (кривая *б*). Расчеты выполнены при указанных выше значениях параметров для случая ветра, направленного вдоль берегов канала ($Y_1 = 1$, $Y_2 = Y_3 = \cdots = 0$, $X = 0$).

Государственный океанографический институт

Поступило 26 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Б. Штокман, Тр. Инст. океонологии АН СССР, **3** (1949).