Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. Б. ДАЦЕВ

О ДВУХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ СТЕФАНА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 27 I 1955)

В задаче Стефана (задача замерзания) рассматривается температурное поле двух сред A_1 и A_2, являющихся твердою и жидкою фазами некоторого тела (например, лед и вода). Разделяющая их поверхность, неизвестная в задаче, имеет постоянную температуру ϑ_0 — температуру фазового перехода (здесь принято для простоты $\vartheta_0 = 0$). Линейная задача замерзания для бесконечных тел поставлена довольно обще Бриллюэном (1) и решена для конечных тел Л. И. Рубинштейном (2). Другим методом мы решили эту задачу в нескольких работах (3–5), что, по нашему мнению, позволяет считать линейную задачу в общем решенной. В случае двух и трех измерений эта задача даже не рассмотрена. Некоторые приближенные решения получены Л. С. Лейбензоном (6) и С. С. Ковнером (7). Здесь мы дадим решение некоторых случаев двухмерной задачи, обобщая изложенный в (3,4) метод решения линейной задачи.

Пусть A_1 (лед) и A_2 (вода) — два бесконечно длинных цилиндрических тела, касающиеся между собой по поверхности C. В сечении их плоскостью γ, нормальной их образующим (которую мы примем за плоскость OXY), получаются две области $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$, разделенные контуром l_0, который в начальный момент t_0 мы полагаем гладкой замкнутой кривой; $R^{(2)}$ — внутренняя простая область, а $R^{(1)}$ — внешняя бесконечная двухсвязная область. Начальные условия предположим такими, чтобы задача в пространстве зависела только от x, y, т. е. рассмотрим двухмерную задачу для пластинок $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$.

Пусть $u^{(m)}(x, y, t)$ $(m = 1, 2)$ — температуры $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$; ρ_m, σ_m, k_m — их плотности, удельные теплоты, коэффициенты теплопроводности (полагаем $\rho_1 = \rho_2$); δ — скрытая теплота плавления; $a_m^2 = k_m / \rho_m \sigma_m$. Функции $u^{(m)}$ удовлетворяют уравнениям теплопроводности

$$a_m^2 \Delta u^{(m)} = \frac{\partial u^{(m)}}{\partial t} \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

и начальным условиям

$$u^{(m)}(x, y, t_0) = \Phi_m(x, y), \tag{2}$$

где Φ_m — непрерывные функции, определенные, соответственно, в $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$.

Контур l изменяется со временем $(l = l(t))$. В пространстве трех измерений x, y, t $(Ot \perp OX, OY)$ l описывает поверхность L, проходящую через l_0. На L будем иметь граничное условие для $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$

$$u^{(m)}(L) = 0. \tag{3}$$

Обозначим через D семейство кривых на L, ортогональных кривым l; через d — нормальные проекции D в плоскости x, y; через $s(\alpha, t)$ — длину дуги кривой d, измеряемой от l_0 (α — параметр, соответствующий определенной кривой семейства d). Параметрические уравнения кривых d в плоскости x, y или кривых D в пространстве x, y, t будут

$$x = f(\alpha, s(\alpha, t)), \quad y = g(\alpha, s(\alpha, t)), \tag{4}$$

где функции f, g удовлетворяют условиям

$$f_t'^2 + g_t'^2 = s_t'^2; \quad f_t' f_\alpha' + g_t' g_\alpha' = 0. \tag{4'}$$

Если t фиксировано, то (4) дают уравнения кривой l. Если α и t изменяются, (4) дают уравнения поверхности L.

Выражая условие теплового баланса как результат теплопроводности и фазового перехода по каждому элементу l с нормалью ν, получим, как и в линейном случае, калориметрическое условие (условие Стефана), которое напишем в виде ($e = 1/\rho\delta$)

$$\frac{ds}{dt} = e\left(k_1 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \nu} - k_2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \nu}\right)_{x=f(\alpha, s(\alpha, t)),\ y=g(\alpha, s(\alpha, t))}. \tag{5}$$

Задача Стефана состоит в нахождении функций $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, s, f, g, определенных условиями (1), (2), (3), (4'), (5).

Вначале рассмотрим следующую вспомогательную задачу. Пусть L — данная гладкая поверхность в пространстве x, y, t, проходящая через l_0, заданное уравнениями (4) (f и g даны). Сечение L в каждой плоскости γ, перпендикулярной Ot, будет замкнутый контур, ограничивающий простую область R в γ. Нужно найти решение $u(x, y, t)$ (1) (опускаем индекс m), удовлетворяющее начальному условию (2) и граничному условию (3) на L.

Разобьем для этого интервал t_0, $t_0 + T$, в котором изучаем процесс, на n частей моментами t_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Проведем через каждую точку t_i оси Ot плоскость γ_i перпендикулярно Ot. γ_i пересекает L по кривой l_i. Построим цилиндрическую поверхность с направляющей l_i и с образующими, параллельными Ot, до ее пересечения с плоскостью γ_{i+1}. Таким образом заменим гладкую поверхность L «ступенчатой» поверхностью L_{in}, составленной цилиндрическими элементами L'_{in} и элементами L''_{in} плоскости γ_i, определенными между цилиндрами L'_{in} и $L'_{i+1,\,n}$. Пусть u_{in} — решение (1) в интервале Δt_i, которое обращается в нуль на L'_{in} и удовлетворяет в области R_{in}, ограниченной контуром l_{i-1}, начальному условию ($t = t_{i-1}$) $u_{in}(x, y, t_{i-1}) = u_{i-1,\,n}(x, y, t_{i-1})$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), где $u_{1n}(x, y, t_0) = \Phi(x, y)$. Будем искать u_{in} в виде ([8],[9]) ($t_{i-1} < t \leqslant t_i$)

$$u_{in}(x, y, t) = V_{in}(x, y, t) + W_{in}(x, y, t); \tag{6}$$

$$V_{in} = \frac{1}{4\pi a^2 (t - t_{i-1})} \iint\limits_{R_{i-1,\,n}} u_{i-1,\,n}(\xi, \eta, t_{i-1}) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2 (t - t_{i-1})}\right] d\xi\, d\eta; \tag{7}$$

$$W_{in} = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{t_{i-1}}^{t} \int\limits_{l_{i-1}} \frac{\mu(\sigma, \tau - t_{i-1})}{(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{r^2}{4a^2 (t-\tau)}\right] r \cos(r\nu)\, d\sigma. \tag{8}$$

Здесь r — расстояние от точки $M_0(\sigma)$ контура l_{i-1} (σ — длина дуги l_{i-1}) до точки $M(x, y)$ плоскости γ_i внутри или вне l_{i-1}; ν — внутренняя нормаль l_{i-1}; $\mu(\sigma, t)$ — неизвестная функция, называемая плотностью потенциала двойного теплового слоя (8). Если M пересекает l_{i-1} в его точке M', $W_{in}(8)$ испытывает разрыв, и в предельном выражении μ выходит за интеграл. Пользуясь этим, обозначая через V_{in}^* значение $V_{in}(7)$ на контуре l_{i-1} и имея в виду, что $u_{in} = 0$ на l_{i-1}, находим для μ интегральное уравнение ([7])

$$\mu(\sigma, t) + \frac{1}{4\pi a^2} \int_{t_{i-1}}^{t} d\tau \int_{l_{i-1}} \frac{\mu(\sigma', \tau - t_{i-1})}{(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right] r \cos(r\nu)\, d\sigma' = -V_{in}^*(\sigma, t) \qquad (9)$$

($r = M_0M'$). Оно типа Фредгольма по отношению к σ и типа Вольтерра по отношению к t. Поставив перед интегралом в (9) множитель λ, решение можно написать в виде $\mu(\sigma, t) = \sum_{q=0}^{\infty} \lambda^q \mu_q(\sigma, t)$. Решение (9) получим отсюда, полагая $\lambda = 1$. Этот ряд сходится равномерно для $t_{i-1} < t \leqslant t'$ (t' фиксировано). Подставляя найденное μ в (8), находим $u_{in}(6)$. Выражая в (7) $u_{i-1,n}$ через $u_{i-2,n}$ и т. д., выразим u_{in} через $u_{1n}(x, y, t_0) = \Phi(x, y)$. Таким образом построим последовательности u_{in}.

Пусть u_{in} и $u_{i,n+p}$ — два решения рассмотренного типа. Их разность $u_{n,n+p} = u_{in} - u_{i,n+p}$ удовлетворяет (1), имеет начальные значения нуль и значения, близкие к нулю, на каждой поверхности L_1, проходящей через l_0 и l и близкой к L_{in}, $L_{i,n+p}$, L. Рассуждая как в линейном случае и используя теорему Грина ([10]) для области R_{in}, получим неравенство

$$2a^2 \iiint \left[\left(\frac{\partial u_{n,n+p}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{n,n+p}}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy\, dt + \iint u_{n,n+p}^2\, dx\, dy < \varepsilon_n. \qquad (10)$$

Здесь первый интеграл распространяется на трехмерную область, ограниченную L_1, γ_i, γ_{i+1}, второй — на R_{in}. $\varepsilon_n > 0$ зависит от L_1 и n; $\varepsilon_n \to 0$ вместе с $1/n$. Из (10) следует, что $u_{n,n+p} \to 0$ вместе с $1/n$, т. е. последовательность u_{in} имеет предел $u(x, y, t)$, когда $n \to \infty$. Это решение (1) для $R^{(2)}$ обозначим $u^{(2)}$. Таким же образом можно найти решение $u^{(1)}$ для области $R^{(1)}$, внешней для контура l_{i-1}.

Теперь решим задачу Стефана для данных тел A_1 и A_2. Разобьем интервал t_0, $t_0 + T$ на n частей моментами t_i. Обозначим через $u_{1n}^{(1)}$, $u_{1n}^{(2)}$ решения (1) ($m = 1, 2$) относительно $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$, удовлетворяющие начальным условиям (2) и граничному условию (3) на элементе L_{1n}' цилиндрической поверхности, построенной при неизменном контуре l_0. Координаты x_0, y_0 точки M_0 контура l_0 можно выразить в функции одного параметра α. Подставляя эти выражения x_0, y_0 вместо x, y в (5), получим функцию $s_{1n}(\alpha, t)$ ($t_0 < t \leqslant t_1$), которая, следовательно, известна. Отложим длину s_{1n} по нормали ν_1 контура l_0 в M_0. Получим линейный элемент d_{1n} кривой d, для которого будут известны функции $f = f_{1n}$, $g = g_{1n}$ (4). Таким образом находим точки $M_1(\alpha, t_1)$ гладкого контура l_1. Пусть $u_{2n}^{(1)}$, $u_{2n}^{(2)}$ — решения (1) для интервала Δt_2 с начальными значениями $u_{1n}^{(1)}(x, y, t_1)$, $u_{1n}^{(2)}(x, y, t_1)$ и значениями нуль по контуру l_1, который считаем неизменным. Из (5), где x, y заменены известными координатами $x_1 = f_{1n}(\alpha, s_{1n}(\alpha, t_1))$,

$y_1 = g_{1n}(\alpha, s_{1n}(\alpha, t_1))$ точки M_1 получим функцию $s_{2n}(\alpha, t)$, откуда найдем точки M_2 по нормали $\nu_2 (= d_{2n})$ контура l_1, т. е. контур l_2, и т. д. Таким образом для интервала Δt_i будем иметь решения $u_{in}^{(1)}$, $u_{in}^{(2)}$ (1) с известными начальными значениями $u_{i-1,\,n}^{(1)}(x, y, t_{i-1})$, $u_{i-1,\,n}^{(2)}(x, y, t_{i-1})$ и с значениями нуль на известном контуре l_{i-1} с точками $M_{i-1}(x_{i-1}\, y_{i-1})$. Функцию s для интервала Δt_i найдем из (5), интегрируя его по t:

$$s_{in}(\alpha, t) = s_{i-1,\,n}(\alpha, t_{i-1}) + e \int_{t_{i-1}}^{t} \left(k_1 \frac{\partial u_{i-1,\,n}^{(1)}}{\partial \nu_i} - k_2 \frac{\partial u_{i-1,\,n}^{(2)}}{\partial \nu_i} \right)_{\substack{x = f_{in}(\alpha, s_{in}(\alpha, t_{i-1})) \\ y = g_{in}(\alpha, s_{in}(\alpha, t_{i-1}))}} dt \tag{5'}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ t_{i-1} < t < \bar{t}_i).$$

По нормалям l_{i-1} нанесем расстояние $\Delta s_{in} = s_{in}(\alpha, t) - s_{i-1,\,n}(\alpha, t_{i-1})$. Получим в момент t точки контура l_i. Обозначим через $\bar{t}_i$ момент, в который на контуре l_i появится особая точка (когда Δs_{in} сделается равным соответственному радиусу кривизны l_{i-1} или когда l_i самопересекается). $\bar{t}_i$ зависит, вообще, от кривизны l_{i-1} и от начальных и граничных данных задачи. Выбираем всегда $t_{i-1} < t < \bar{t}_i$, так что контур l_i будет без особых точек. В действительности для получения лучших приближений выберем интервалы согласно условию $t_i - t_{i-1} \ll \bar{t}_i - t_{i-1}$.

Таким образом построим последовательности $u_{in}^{(1)}$, $u_{in}^{(2)}$, s_{in}, f_{in}, g_{in} (или кривые d_{in}). Когда $\Delta t_i \to 0$, очевидно, (5′) превращается в условие (5). Граничным переходом $n \to \infty$ и все $\Delta t_i \to 0$ одновременно найдем искомое решение.

Легко проверить, что для достаточно близкой окрестности точки M_0 контура l_0 и для достаточно малого, но фиксированного интервала $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ построенные решения стремятся с данным приближением к соответственным решениям линейной задачи относительно нормали ν_1. Из этого следует, что последовательности $u_{in}^{(1)}$, $u_{in}^{(2)}$, s_{in} имеют в интервале Δt_1 пределы $u^{(1)}(x, y, t)$, $u^{(2)}(x, y, t)$, $s(\alpha, t)$, дающие решение задачи. Шаг за шагом, используя результаты линейной задачи, получим, что для конечного интервала t_0, $t_0 + T$ построенные выше последовательности имеют пределы, дающие точное и единственное решение поставленной двухмерной задачи Стефана.

Подобным образом можно найти решение задачи в случае, когда $R^{(1)}$ — конечная многосвязная область с контуром $l^{(1)}$, содержащая простые конечные области $R^{(p)}$ с контурами $l^{(p)}$, если задана температура или излучение по $l^{(1)}$. Задачу об исчезновении фазы или распадении фазы на несколько областей можно решить без затруднений изложенным способом. Можно сделать обобщение для случая, когда начальный контур l_0 имеет угловые точки.

Софийский государственный университет
София, Болгария

Поступило
3 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Brillouin, Ann. de l'Inst. Poincaré, **1** (1931). [2] Л. И. Рубинштейн, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., **11**, № 1 (1947). [3] А. Б. Дацев, ДАН, **58**, № 4 (1947); A. B. Datzeff, Ann. de l'Univ. de Sofia, **45**, 1 (1948—1949). [4] А. Б. Дацев, ДАН, **74**, № 3 (1950); **75**, № 5 (1950); A. B. Datzeff, Ann, de l'Univ. de Sofia, **46**, 1 (1949—1950). [5] А. Б. Дацев, ДАН, **87**, № 3 (1952). [6] Л. С. Лейбензон, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 6 (1939). [7] С. С. Ковнер, Изв. АН СССР, сер. геогр.и геофиз., № 3 (1943). [8] С. Г. Михлин, Приложения интегральных уравнений, 1947. [9] Г. Мюнц, Интегральные уравнения, 1, 1934. [10] С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, 1950.