Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 3

*МАТЕМАТИКА*

Ф. И. ХАРШИЛАДЗЕ

# ЯВЛЕНИЕ ГИББСА ПРИ СУММИРОВАНИИ РЯДА ФУРЬЕ МЕТОДАМИ БЕРНШТЕЙНА — РОГОЗИНСКОГО

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 XII 1954)*

1°. Средние Бернштейна — Рогозинского для тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin nx) \tag{1}$$

определяются по формуле

$$B_n^{(k)}(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}\cos^k\frac{\nu\pi}{2n+1}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x). \tag{2}$$

Если при $n\to\infty$ $B_n^{(k)}(x)$ имеет предел, то ряд (1) называется суммируемым методом $(БР, k)$. Методы суммирования $(БР, k)$ не слабее соответствующих методов $(C, k)$ (2). Кроме того $(БР, k)$-средние, вообще говоря, быстрее приближаются к сумме ряда (1), чем $(C, k)$-средние (1).

В настоящей заметке будет показано, что в окрестности точки разрыва функции, для которой ряд (1) служит рядом Фурье, при суммировании этого ряда методом $(БР, k)$ имеет место явление Гиббса, и, следовательно, кривые $y=B_n^{(k)}(x)$ больше отклоняются от графика самой функции, чем кривые, соответствующие $(C, k)$-средним, для которых, как известно, явление Гиббса не имеет места при $k\geqslant 1$.

2°. Мы исследуем ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\nu x}{\nu}, \tag{3}$$

являющийся рядом Фурье для функции $f(x)=\frac{1}{2}(\pi-x)$ $(0<x<2\pi)$. Известно (см., например, (4), стр. 180—181), что случай ряда Фурье произвольной функции, имеющей изолированный разрыв первого рода, сводится к этому ряду.

Прежде всего, приведем одну формулу, выражающую $(БР, k)$ средние через частные суммы ряда (1), которую легко вывести из определения (2):

$$B_n^{(k)}(x)=\frac{1}{2}\left\{B_n^{(k-1)}\left(x-\frac{\pi}{2n+1}\right)+B_n^{(k-1)}\left(x+\frac{\pi}{2n+1}\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{2^k}\sum_{\nu=0}^{k}C_k^\nu S_n\left(x-(k-2\nu)\frac{\pi}{2n+1}\right); \tag{4}$$

здесь $S_n(x)$ — частные суммы ряда (1), а $C_k^\nu$ — биномиальные коэффициенты.

Известно, что для ряда (3)

$$S_n(x) = -\frac{x}{2} + \operatorname{si}(nx) + o(1) \quad (0 < x < 2\pi),$$

где $\operatorname{si}(x)$ есть интегральный синус: $\operatorname{si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$, а $o(1)$ означает величину, равномерно стремящуюся к нулю при $n \to \infty$. В силу (4) для ряда (3) будем иметь:

$$B_n^{(k)}(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2^k}\sum_{\nu=0}^{k} C_k^\nu \operatorname{si}\left(nx - (k-2\nu)\frac{\pi}{2n+1}\right) + o(1).$$

Пусть $h_n$ — последовательность положительных чисел такая, что $nh_n \to \alpha$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant \infty$. Очевидно, при $n \to \infty$

$$B_n^{(k)}(h_n) \to \frac{1}{2^k}\sum_{\nu=0}^{k} C_k^\nu \operatorname{si}\left(\alpha - (k-2\nu)\frac{\pi}{2}\right) = \varphi_k(\alpha).$$

Как нетрудно видеть,

$$2^k \varphi_k'(\alpha) = \pi^k k! \frac{\sin\left(\alpha - \frac{k\pi}{2}\right)}{\omega_k\left(\alpha - \frac{k\pi}{2}\right)},$$

где $\omega_k(t) = \prod_{\nu=0}^{k}(t + \nu\pi)$.

Следовательно, в промежутке $0 \leqslant \alpha \leqslant \infty$ функция $\varphi_k(\alpha)$ имеет первый максимум слева в точке $\alpha_k^{(1)} = k\pi/2 + \pi$, второй максимум в точке $\alpha_k^{(2)} = k\pi/2 + 3\pi$, третий максимум в точке $\alpha_k^{(3)} = k\pi/2 + 5\pi$ и т. д. Эти максимумы монотонно убывают, так что функция $\varphi_k(\alpha)$ имеет абсолютный максимум в точке $\alpha_k = \alpha_k^{(1)} = k\pi/2 + \pi$. Этот максимум равен

$$\varphi_k(\alpha_k) = \frac{1}{2^k}\sum_{\nu=0}^{k} C_k^\nu \operatorname{si}[(\nu+1)\pi]. \tag{5}$$

Таким образом, кривые $y = B_n^{(k)}(x)$ сгущаются справа к интервалу $0 \leqslant y \leqslant \varphi_k(\alpha_k)$.

Мы покажем теперь, что $\varphi_k(\alpha_k) - \pi/2 > 0$ при любом $k$, так что интервал $0 \leqslant y \leqslant \varphi_k(\alpha_k)$ длиннее интервала $0 \leqslant y \leqslant f(+0) = \pi/2$. Тем самым будет доказано, что при суммировании ряда (3) методом $(BP, k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ имеет место явление Гиббса.

В самом деле,

$$\varphi_k(\alpha_k) - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2^k}\sum_{\nu=0}^{k} C_k^\nu \left\{\operatorname{si}[(\nu+1)\pi] - \frac{\pi}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2^k}\sum_{\nu=0}^{k} C_k^\nu \left\{\operatorname{si}[(\nu+1)\pi] - \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{2^k}\sum_{\nu=0}^{k} C_k^\nu \left\{-\int_{(\nu+1)\pi}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt\right\} = \frac{1}{2^k}\int_0^\infty \left\{\sum_{\nu=0}^{k} \frac{C_k^\nu (-1)^\nu}{t + (\nu+1)\pi}\right\} \sin t\,dt.$$

Пользуясь тождеством

$$\sum_{\nu=0}^{k} \frac{C_k^{\nu}(-1)^{\nu}}{t+(\nu+1)\pi} = \frac{\pi^k k!}{\omega_k(t+\pi)},$$

получаем:

$$\varphi_k(\alpha_k) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^k k!}{2^k} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\omega_k(t+\pi)}\, dt =$$

$$= \frac{\pi^k k!}{2^k} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \int_0^{\pi} \frac{\sin t\, dt}{\omega_k[t+(s+1)\pi]} > 0, \tag{6}$$

что и требовалось доказать.

Вычисления показывают, что

$$\varphi_1(\alpha_1) - \frac{\pi}{2} = 0{,}064\ldots, \quad \varphi_2(\alpha_2) - \frac{\pi}{2} = 0{,}019\ldots,$$

$$\varphi_3(\alpha_3) - \frac{\pi}{2} = 0{,}007\ldots, \quad \varphi_4(\alpha_4) - \frac{\pi}{2} = 0{,}0026\ldots$$

Из формулы (6) легко усмотреть, что $\varphi_k(\alpha_k) > \varphi_{k+1}(\alpha_{k+1})$ и

$$\varphi_k(\alpha_k) - \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2^k(k+1)}.$$

Следовательно, при возрастании $k$ явление Гиббса имеет тенденцию к быстрому исчезновению.

3°. Недавно Уолмсли ([3]) исследовал явление Гиббса при суммировании обобщенных рядов Фурье методами Чезаро и Гельдера.

Ряд (1) называется обобщенным рядом Фурье в смысле главного значения для функции $f(x)$, имеющей особенности в интервале $(-\pi, \pi)$, если коэффициенты $a_k$ и $b_k$ определены по формулам

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx,$$

где интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши. Мы исследуем здесь явление Гиббса при суммировании обобщенного ряда Фурье методом (*БР*, 1). Как и Уолмсли, мы ограничимся исследованием ряда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sin \nu x, \tag{7}$$

являющегося обобщенным рядом Фурье в смысле главного значения для функции $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. Это достаточно для уяснения явления Гиббса для обобщенного ряда Фурье любой функции, имеющей изолированный полюс первого порядка на интервале $(-\pi, \pi)$. Так как для ряда (7)

$$S_n(x) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}},$$

то

$$B_n^{(1)}(x) = \frac{1}{4}\frac{\sin x}{\sin\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2n+1}\right)\sin\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{2n+1}\right)} +$$

$$+\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{2n+1}\right)} - \frac{1}{\sin\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2n+1}\right)}\right\}\sin\frac{2n+1}{2}x.$$

Из этой формулы видно, что ряд (7) суммируем методом $(BP, 1)$ к функции $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, если $x \neq 0$. Таким образом, отношение $\frac{B_n^{(1)}(x)}{f(x)} = \beta_n(x) \to 1$ при $x \neq 0$.

Если, как и выше, $nh_n \to \alpha$, то

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n(h_n) = \beta(\alpha) = 1 + \frac{\pi^2 - 2\pi\alpha\sin\alpha}{4\alpha^2 - \pi^2}.$$

Так как $\beta\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}$, то в точках $h_n = \frac{3\pi}{2n}$ кривые $y = B_n^{(1)}(x)$ в $1^1/_2$ раза больше удалены от оси $x$, чем кривая $y = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. Наибольшее значение $\beta(\alpha)$ в промежутке $0 \leqslant \alpha \leqslant \infty$ немногим больше $^3/_2$.

В цитированной статье Уолмсли показал, что ордината $y = \sigma_n(x)$, где $\sigma_n(x)$ есть $(C, 1)$-средние ряда (7), нигде не превосходит ординаты $y = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ более чем на 22%.

Следовательно, кривые $y = B_n^{(1)}(x)$ значительно больше колеблются в окрестности точки $x = 0$, чем кривые $y = \sigma_n(x)$.

Тбилисский государственный университет
им. И. В. Сталина

Поступило
14 XII 1954

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, C. R., 191, (1930). [2] Ф. И. Харшиладзе, ДАН, 30, 692 (1941). [3] C. Walmsley, J. London Math. Soc., 28, 148 (1953). [4] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.