Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 1

ФИЗИКА

К. П. СТАНЮКОВИЧ

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ОБЛАСТИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МАГНИТОГАЗОДИНАМИКИ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 16 II 1955)

Уравнения движения и сохранения энергии в релятивистском случае можно найти из уравнений

$$\frac{\partial (T_{ik} + \overline{T}_{ik})}{\partial X_k} = 0, \tag{1}$$

где в движущейся системе отсчета

$$T_{ik} = (p + \varepsilon) U_i U_k + \delta_{ik} p \tag{2}$$

есть симметричный тензор энергии импульса для макроскопического движения среды, причем p — давление; U_i — компоненты 4-скорости; $\varepsilon = \rho c^2$ — объемная плотность энергии; ρ — плотность среды (включая ее внутреннюю энергию); $\overline{T}_{ik}$ — симметричный тензор энергии импульса электромагнитного поля. В системе отсчета, где данный элемент покоится, в обычных трех обозначениях

$$\begin{aligned} \overline{T}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4\pi}\left[-(E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta) + \frac{E^2 + H^2}{2}\delta_{\alpha\beta}\right]; \\ \overline{T}_{\alpha 4} &= \frac{i}{c} S_\alpha = \frac{i}{4\pi}[EH]; \quad \overline{T}_{44} = -W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь E и H — напряженность электрического и магнитного полей; S — вектор Пойнтинга; W — плотность энергии поля.

Уравнения (1) при подстановке соотношений (2) и (3), написанных в движущейся системе отсчета, дадут необходимые уравнения для описания процесса движения среды в электромагнитном поле, если известно уравнение состояния среды и если мы еще используем два уравнения Максвелла, написанных для движущейся системы координат:

$$\operatorname{div} \overline{H} = 0; \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \overline{E} = 0. \tag{4}$$

При этом надо учесть, что для E и H имеют место преобразования Лоренца. В случае бесконечной электропроводности $E = 0$, и выведенные выше соотношения сильно упрощаются.

Перейдем к случаю одноразмерных движений газа в магнитном поле. Рассмотрим случай, когда

$$u = u(x); \quad v = w = 0; \quad H_z = H(x); \quad H_x = H_y = 0. \tag{5}$$

При этом уравнения (1) примут вид:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t}[T_{14} + \overline{T}_{14}] + \frac{\partial}{\partial x}[T_{11} + \overline{T}_{11}] = 0; \\ &\frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t}[T_{44} + \overline{T}_{44}] + \frac{\partial}{\partial x}[T_{14} + \overline{T}_{14}] = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

причем:

$$T_{14}=\frac{iu}{c\theta^2}(p+\varepsilon);\quad \overline{T}_{14}=\frac{iu}{c\theta^2}\frac{H^2}{4\pi};$$
$$T_{11}=-\frac{1}{\theta}\left(p+\varepsilon\frac{u^2}{c^2}\right);\quad \overline{T}_{11}=-\frac{(1+u^2/c^2)}{\theta^2}\frac{H^2}{8\pi}; \tag{7}$$
$$T_{44}=-\frac{1}{\theta^2}\left(p\frac{u^2}{c^2}+\varepsilon\right);\quad \overline{T}_{44}=-\frac{(1+u^2/c^2)}{\theta^2}\frac{H^2}{8\pi}.$$

Первое уравнение (4) при этом выполняется тождественно; второе уравнение (6) принимает вид:

$$\frac{\partial(H/\theta)}{\partial t}+\frac{\partial(uH/\theta)}{\partial x}=0. \tag{8}$$

После подстановки компонент тензоров (7) в уравнение (6) и ряда простых преобразований будем иметь:

$$\frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{c^2}{p+\varepsilon+H^2/4\pi}\left[\frac{\partial(p+H^2/8\pi)}{\partial x}+\frac{u}{c^2}\frac{\partial(p+H^2/8\pi)}{\partial t}\right]=0,$$
$$\frac{\partial(\varepsilon+H^2/8\pi)}{\partial t}+u\frac{\partial(\varepsilon+H^2/8\pi)}{\partial x}+\frac{w\theta}{v}\left[\frac{\partial(1/\theta)}{\partial t}+\frac{\partial(u/\theta)}{\partial x}\right]=0, \tag{9}$$

где $w=(p+\varepsilon+H^2/4\pi)v$ есть теплосодержание; v — удельный объем.

Поскольку

$$d(\varepsilon v)=T\,d\sigma-p\,dv \quad \text{или} \quad d[(\varepsilon+H^2/8\pi)v]=T\,d\sigma-(p+H^2/8\pi)\,dv, \tag{10}$$

где σ — энтропия; T — температура, то из второго уравнения (9) и уравнения (10) имеем

$$vw\left[\frac{\partial(1/\theta v)}{\partial t}+\frac{\partial(u/\theta v)}{\partial x}\right]+\frac{T}{c\theta}\left[\frac{\partial\sigma}{\partial t}+u\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right]=0. \tag{11}$$

При изэнтропических процессах $\sigma=\text{const}$, и (11) принимает вид:

$$\frac{\partial(1/\theta v)}{\partial t}+\frac{\partial(u/\theta v)}{c\theta}=0. \tag{12}$$

Из (10) будем иметь:

$$\frac{\partial\varepsilon}{p+\varepsilon}=-\frac{\partial v}{v},\quad \text{или}\quad d\ln v=-\frac{d\ln\rho}{1+p/\rho c^3}. \tag{13}$$

Из (12) и (8) будем иметь:

$$Hv=b=\text{const}. \tag{14}$$

Для дальнейших преобразований выгодно написать уравнение (12) в виде

$$\frac{\partial\ln v}{\partial t}+u\frac{\partial\ln v}{\partial x}-\frac{1}{\theta^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{u}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}\right]=0. \tag{15}$$

Для полного решения задачи о неустановившихся изэнтропических одноразмерных движениях среды в магнитном поле надо иметь решения первого уравнения (9) и уравнения (15) при заданном уравнении состояния, причем H и v связаны уравнением (14).

Уравнение (12) или (15) является уравнением неразрывности. Если ввести число частиц в единице объема n, то, поскольку $n\sim 1/v$, уравнение (12) примет вид:

$$\frac{\partial(n/\theta)}{\partial t}+\frac{\partial(nu/\theta)}{\partial x}=0. \tag{16}$$

Введем

$$dq=\frac{du}{1-u^2/c^2}=\frac{du}{\theta^2}=\frac{c}{2}d\ln\frac{1+u/c}{1-u/c},\quad d\Omega=-\omega^*\,d\ln v; \tag{17}$$

$\frac{\omega}{c}=\sqrt{\frac{d(p+H^2/8\pi)}{d(\varepsilon+H^2/8\pi)}}$ есть эффективная магнитогазодинамическая ско-

рость звука, $\omega/c = \sqrt{dp/d\varepsilon}$ — обычная скорость звука. При этом первое уравнение (9) и уравнение (15) примут вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial q}{\partial t} + u\frac{\partial q}{\partial x} + \omega^*\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{u}{c^2}\frac{\partial \Omega}{dt}\right) = 0; \\ &\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \omega^*\left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{u}{c^2}\frac{\partial q}{\partial t}\right) = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Складывая второе уравнение (18) с первым и вычитая его из первого, придем к уравнениям:

$$\frac{\partial (q \pm \Omega)}{\partial t} + \frac{u \pm \omega^*}{1 \pm u\omega^*/c^2}\frac{\partial (q \pm \Omega)}{\partial x} = 0. \tag{19}$$

Отсюда сразу находим особые решения системы (18):

$$q = \pm \Omega + \text{const}; \quad x = \frac{u \pm \omega^*}{1 \pm u\omega^*/c^2}\, t + F(u). \tag{20}$$

Характеристики системы (18) имеют вид: вдоль линий

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u \pm \omega^*}{1 \pm u\omega^*/c^2}, \quad d(q \pm \Omega) = 0. \tag{21}$$

Зная уравнение характеристик, легко привести уравнения (18) к канонической форме, решаемой методом Римана (методом характеристик). При уравнении состояния $p = A(\sigma)\, v^{-k}$, $\rho = \frac{1}{v} + \frac{p}{(k-1)\,c^2}$, если $p = \alpha\rho c^2$, где $\alpha = \text{const}$, то $\rho = \beta v^{-(1+\alpha)}$, где $\beta = \text{const}$; при этом, соответственно:

$$\frac{\omega^*}{c} = \left(\frac{kAv^{2-k} + \frac{b^2}{4\pi}}{\frac{k}{k-1}Av^{2-k} + \frac{b^2}{4\pi} + c^2 v}\right)^{1/2}, \quad \frac{\omega^*}{c} = \left(\frac{\alpha(\alpha+1)\beta c^2 v^{1-\alpha} + \frac{b^2}{4\pi}}{(\alpha+1)\beta c^2 v^{1-\alpha} + \frac{b^2}{4\pi}}\right)^{1/2}; \tag{22}$$

при $\alpha = 1/3$ имеем ультрарелятивистский газ, для него

$$\begin{aligned} &\frac{\omega^*}{c} = \sqrt{\frac{4/9\,\beta c^2 v^{2/3} + b^2/4\pi}{4/3\,\beta c^2 v^{2/3} + b^2/4\pi}}, \\ &\Omega = -\int \omega^*\, d\ln v = -3/2\, c \int \left(\frac{4/9\,\beta c^2 v^{2/3} + b^2/4\pi}{4/3\,\beta c^2 v^{2/3} + b^2/4\pi}\right)^{1/2} d\ln v^{2/3}. \end{aligned} \tag{23}$$

Интегрируя, находим:

$$\frac{\Omega}{c} = \ln\left[\frac{\omega^*/c + 1}{\omega^*/c + 1}\,\frac{\sqrt{3}\omega^*/c - 1}{\sqrt{3}\omega^*/c + 1}\right]^{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}. \tag{24}$$

Таким образом, для простых волн имеем уравнения

$$\begin{aligned} &x = \frac{u \pm \omega^*}{1 \pm u\omega^*/c^2}\, t + F(u); \\ &\left(\frac{1 + u/c}{1 - u/c}\right)\left(\frac{\omega^*/c + 1}{\omega^*/c - 1}\,\frac{\sqrt{3}\omega^*/c - 1}{\sqrt{3}\omega^*/c + 1}\right)^{\pm(3+\sqrt{3})} = \text{const}. \end{aligned} \tag{25}$$

Можно рассмотреть другой случай одноразмерного движения газа, когда $H_y = H_z = 0$; $H_x = H(x)$; при этом из условия $\operatorname{div} H = 0$ имеем $H = H(t)$, а из второго уравнения (6) получим $\partial H/\partial t = 0$, т. е. $H = \text{const}$. При постоянном поле задача сводится просто к движению газа, которая была уже решена ([3]).

Рассмотрим теперь соотношение для прямых ударных волн при

движении газа в магнитном поле. Пусть разрыв неподвижен и движение через него происходит вдоль оси X. Тогда вдоль разрыва сохраняются величины [4]

$$T_1+\overline{T}_1=\frac{1}{\theta^2}\left[p+\varepsilon\frac{u^2}{c^2}+\left(1+\frac{u^2}{c^2}\right)\frac{H^2}{8\pi}\right];\quad T_4+\overline{T}_4=\frac{u}{\theta^2}\left[p+\varepsilon+\frac{H^2}{4\pi}\right]. \tag{26}$$

Таким образом, обозначая величины до разрыва индексом 0, придем к соотношениям:

$$\frac{p+\varepsilon u^2/c^2+(1+u^2/c^2)\,H^2/8\pi}{\theta^2}=\frac{p_0+\varepsilon_0 u_0^2/c^2+(1+u_0^2/c^2)H_0^2/8\pi}{\theta_0^2};$$

$$\frac{u}{\theta^2}\left[p+\varepsilon+\frac{H^2}{4\pi}\right]=\frac{u_0}{\theta_0^2}\left[p_0+\varepsilon_0+\frac{H_0^2}{4\pi}\right]. \tag{27}$$

Второе уравнение (27) разбивается на два:

$$\frac{u}{\theta v}=\frac{u_0}{\theta_0 v_0},\quad \frac{w}{\theta}=\frac{w_0}{\theta_0}, \tag{28}$$

где $w=(p+\varepsilon+H^2/4\pi)\,v$; $w_0=(p_0+\varepsilon_0+H_0^2/4\pi)\,v_0$.

Поскольку при переходе через разрыв также сохраняются величины $Hu/\theta=H_0u_0/\theta_0$, т. е. снова имеет место соотношение $Hv=b$, то первое уравнение (27) упрощается, а именно, оно примет вид:

$$\frac{p+\varepsilon u^2/c^2+H^2/8\pi}{\theta^2}=\frac{p_0+\varepsilon_0 u_0^2/c^2+H_0^2/8\pi}{\theta_0^2}. \tag{29}$$

Уравнения (28) и (29) полностью описывают свойства прямой магнитогазодинамической ударной волны.

В заключение укажем, что в случае именно одноразмерных движений можно получить уравнение движения газа в произвольном поле, энергия которого ε', при этом дополнительное давление p', как это вытекает из термодинамического тождества, должно выражаться соотношением

$$p'=\pm\frac{\partial(\varepsilon' v)}{\partial v}, \tag{30}$$

где знак плюс нужно выбирать в случае поля, которое «стягивает» среду (силы притяжения между частицами), и знак минус, когда поле «растягивает» среду (силы отталкивания). Все соотношения обычной одноразмерной релятивистской газодинамики будут иметь смысл, если к энергии ε добавить энергию поля ε', а к давлению p — давление p', при этом

$$\frac{\omega^*}{c}=\sqrt{\frac{d(p+p')}{d(\varepsilon+\varepsilon')}},\quad w=(p+p'+\varepsilon+\varepsilon')\,v \tag{31}$$

и соответственно изменятся другие соотношения. Уравнения газодинамики можно будет интегрировать, если известно $p'=f(v)$ или $\varepsilon'=\varphi(v)$. Аналогично изменятся уравнения теории ударных волн.

Высшее техническое училище
им. Баумана

Поступило
15 II 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, М., 1953. [2] П. Г. Бергман, Введение в теорию относительности, ИЛ, М., 1947. [3] К. П. Станюкович, Тр. 3-го совещ. по вопросам космогонии, Изд. АН СССР, М., 1954. [4] Ф. Гофман, Е. Теллер, Магнитогидродинамические ударные волны, Проблемы современной физики, в. 2, ИЛ, 1954.