Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 2

ГЕОФИЗИКА

А. А. ЛЯПУНОВ

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

(Представлено академиком Г. А. Гамбурцевым 31 XII 1954)

Нередко интерпретация гравитационных наблюдений ведется путем подбора. В этих случаях целесообразно для контроля иметь какие-либо тождества, связывающие величины, вычисляемые по данным наблюдениям, с величинами, вычисляемыми по предполагаемой интерпретации. Такого рода тождества были предложены Г. А. Гамбурцевым ([1]). Они заключаются в том, что гармонические моменты массы вычисляются при помощи интегрирования производных от потенциала по поверхности земли. При использовании этих критериев возникает некоторая трудность, связанная с тем, что интегралы приходится вычислять в бесконечных пределах. В связи с этим мы имеем в виду описать некоторый критерий аналогичной природы, который требует вычисления интегралов от силы тяжести в произвольных конечных пределах.

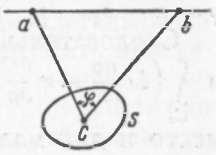


Рис. 1

Мы будем рассматривать вопрос об интерпретации гравитационных наблюдений в случае бесконечной цилиндрической массы произвольного сечения.

Пусть ось x (рис. 1) расположена на поверхности земли; S — сечение аномальной массы, расположенной под землей; a и b — две произвольные точки оси x. Пусть C — произвольная точка плоскости и φ — угол, под которым отрезок $[a, b]$ виден из точки C. В нижней полуплоскости $\varphi > 0$, в верхней полуплоскости $\varphi < 0$. Функция φ является однозначной и гармонической во всей плоскости, за исключением разреза $[a, b]$. На нижней стороне этого разреза она принимает значение π, на верхней значение $-\pi$. На остальной части оси x $\varphi = 0$. Рассмотрим область D (рис. 2), ограниченную окружностью C_1 радиуса R с центром в точке b и контуром C_2, охватывающим разрез $[a, b]$ и состоящим из двух малых окружностей радиуса r с центрами в точках a и b и двух отрезков, расположенных на обеих сторонах разреза $[a, b]$. Пусть ρ — плотность аномальной массы и U — ее логарифмический потенциал.

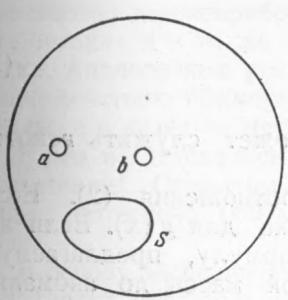


Рис. 2

Рассмотрим выражение

$$H = \iint_D (U\Delta\varphi - \varphi\Delta U)\, d\sigma = \int_{C_1+C_2} \left(U\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial U}{\partial n}\right) dS, \qquad (1)$$

где n — внешняя нормаль по отношению к области D. Так как вне массы U является гармонической, внутри массы $\Delta = -2\pi\gamma\rho$, то

$$H = 2\pi\gamma \iint_S \rho\varphi \, d\sigma.$$

На контуре C_1 имеют место следующие асимптотические соотношения:

$$U \approx \text{const} \cdot \ln R, \qquad \frac{\partial U}{\partial n} \approx \text{const} \cdot \frac{1}{R},$$

$$\varphi \approx \text{const} \cdot \frac{1}{R}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \approx \text{const} \cdot \frac{1}{R^2}.$$

Поэтому

$$\int_{C_1} \left(U \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS \to 0 \quad \text{при } R \to \infty.$$

Рассмотрим теперь интеграл в правой части равенства (1) на контуре C_2. Он распадается на два интеграла по отрезку $[a + r,\ b - r]$ и два интеграла по маленьким окружностям. Рассмотрим интеграл по маленькой окружности C с центром в точке a. Ясно, что в окрестности точки a функции φ, U и $\partial U / \partial n$ ограничены. Кроме того $\varphi = \pi - \varphi_1 - \varphi_2$ и, следовательно, $\partial\varphi / \partial n = -\partial\varphi_2 / \partial n$.

Следовательно, $\partial\varphi / \partial n$ также ограничена в окрестности точки a и $\int_{C_2} \left(U \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS \to 0$ при $r \to 0$. Такое же соотношение имеет место и для маленькой окружности с центром в точке b.

В двух интегралах по отрезку $[a + r,\ b - r]$ функции φ, $\partial\varphi / \partial n$ и $\partial U / \partial n$ отличаются только знаками, а U принимает одинаковые значения. При $r \to 0$ интегралы стремятся к интегралу по отрезку $[a, b]$. Поэтому от интеграла, стоящего в правой части равенства (1), остается только выражение:

$$2\pi \int_a^b \frac{\partial U}{\partial n} \, \partial x = 2\pi \int_a^b g(x) \, dx,$$

где $g(x)$ — наблюденная аномалия силы тяжести. Таким образом мы получили соотношение:

$$\int_a^b g(x) \, dx = \gamma \iint_S \rho\varphi \, d\sigma, \tag{2}$$

где $\gamma = 6{,}664 \cdot 10^{-8}$ см^3/сек^2·г. Это тождество может служить некоторым критерием для контроля интерпретации.

Отметим некоторые предельные случаи соотношения (2). Если $a \to b$, то оно обращается в обычное выражение для $g(x)$. Если же $a \to -\infty$, а $b \to +\infty$, то оно обращается в формулу, предлагаемую Г. А. Гамбурцевым для вычисления аномальной массы по аномалии силы тяжести.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
28 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. А. Гамбурцев, Прямые методы интерпретации, Определение массы и центра тяжести возмущающего тела (В книге Г. Рейх и К. Юнг, Прикладная геофизика, в. 1, 1936). [2] Г. А. Гамбурцев, Изв. АН СССР, отд. матем. и естеств. наук (1938). [3] Г. А. Гамбурцев, Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз. (1940). [4] А. А. Заморев, Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., № 3 (1940).