Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 3

МАТЕМАТИКА

С. Я. ХАВИНСОН

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 XII 1954)

В настоящей заметке формулируются результаты, обобщающие соответствующие теоремы из наших работ ([1–4]) на случай более общих классов функций. Основные результаты работы (§ 1) получены в работе ([8]).

Расмотрим n-связную конечную область G, ограниченную спрямляемыми контурами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$; $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i$. Используем следующие классы функций: B и B^1 (определены в ([3])); E_q $(q \geqslant 1)$ — определяется аналогично односвязному случаю (см. ([5]), гл. III); функция $f(z) \in E_q$ имеет почти везде на Γ граничные значения $f(x)$, суммируемые в степени q.

Пусть на Γ задана функция $\rho(x)$: $0 < m \leqslant \rho(x) \leqslant M < +\infty$. Введем еще классы: $B_{\rho(x)}, C_{\rho(x)}, E_{\rho(x),\,q}, \widetilde{B}_{\rho(x)}, \widetilde{E}_1$: $f(z) \in B_{\rho(x)}$, если $f(z) \in B$ и $|f(x)| \leqslant \rho(x)$ (здесь и в дальнейшем $f(x)$ — граничные значения $f(z)$); $f(z) \in C_{\rho(x)}$, если $f(z) \in B_{\rho(x)}$ и непрерывна в $\overline{G}$; $f(z) \in E_{\rho(x),\,q}$, если $f(z) \in E_q$ и $\int_\Gamma [|f(x)|\rho^{-1}(x)]^q\, ds \leqslant 1$; $f(z) \in \widetilde{B}_{\rho(x)}$, если $f(z) \in B$ и существуют (для каждой $f(z)$ свои) числа $a_i, i = 1, \ldots, n$, такие, что $|f(x) - a_i| \leqslant \rho(x)$, $x \in \gamma_i$, $i = 1, \ldots, n$; $f(z) \in \widetilde{E}_1$, если $f(z) \in E_1$ и $\int_{\gamma_i} f(x)\, dx = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Если $\rho(x) \equiv 1$, то $B_{\rho(x)} \equiv B^1$, $E_{\rho(x),\,q} \equiv E_q^1$.

Теорема. *Классы $B_{\rho(x)}$, $E_{\rho(x),\,q}$, $\widetilde{B}_{\rho(x)}$, $\widetilde{E}_1$ компактны в себе относительно сходимости внутри G.*

§ 1. Обозначим через l_k длину γ_k.

Теорема 1. 1) *Пусть $\psi(x)$ — заданная на всех отрезках $[0, l_k]$ функция с ограниченным изменением; тогда*

$$\sup_{f \in C_{\rho(x)}} \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{0+0}^{l_k - 0} f(x)\, d\psi(x) \right| = \inf_{\varphi \in E_1} \sum_{k=1}^{n} \int_{0+0}^{l_k - 0} \left| d\left\{ \int_0^x \rho(x) [d\psi(x) - d\Phi(x)] \right\} \right|, \qquad (1)$$

где $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(x)\, dx$.

2) *Пусть $\omega(x) \in L_1$; тогда*

$$\sup_{f \in B_{\rho(x)}} \left| \int_\Gamma f(x)\, \omega(x)\, dx \right| = \inf_{\varphi \in E_1} \int_\Gamma \rho(x) |\omega(x) - \varphi(x)|\, ds. \qquad (2)$$

3) *Пусть область G удовлетворяет условию В. И. Смирнова (условие В. И. Смирнова ([5]) естественно распространяется на многосвязные области); если $\omega(x)$ ограничена на Γ и $\rho(x)$ непрерывна на Γ, то*

$$\sup_{f\in E_{\rho(x),\,1}}\left|\int_\Gamma f(x)\,\omega(x)\,dx\right| = \inf_{\varphi\in B}\operatorname{vrai}\max_{x\in\Gamma}\rho(x)\,|\omega(x)-\varphi(x)|. \tag{3}$$

4) *Пусть область G удовлетворяет условию В. И. Смирнова и $\omega(x)\in L_p$, $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; тогда*

$$\sup_{f\in E_{\rho(x),q}}\left|\int_\Gamma f(x)\,\omega(x)\,dx\right| = \inf_{\varphi\in E_p}\left\{\int[\rho(x)\,|\omega(x)-\varphi(x)|]^p\,ds\right\}^{1/p}. \tag{4}$$

5) *Пусть $\omega(x)\in L_1$ и $\int\limits_{\gamma_i}\omega(x)\,dx=0$, $i=1,\ldots,n$; тогда*

$$\sup_{f\in\widetilde{B}_{\rho(x)}}\left|\int_\Gamma f(x)\,\omega(x)\,dx\right| = \inf_{\varphi\in\widetilde{E}_1}\int_\Gamma\rho(x)\,|\omega(x)-\varphi(x)|\,ds. \tag{5}$$

Доказательство всех этих соотношений основано на лемме из ([3]).

Теорема 2. *Существуют экстремальные функции $f^*(z)$ и $\varphi^*(z)$ в равенстве (2). Для того чтобы функции $f^*(z)\in B_{\rho(x)}$ и $\varphi^*(z)\in E_1$ были экстремальными в (2), необходимо и достаточно, чтобы почти везде на Γ:*

$$f^*(x)\,[\omega(x)-\varphi^*(x)]\,dx = e^{i\alpha}\rho(x)\,|\omega(x)-\varphi^*(x)|\,ds. \tag{6}$$

Экстремаль $f^*(z)$ единственна с точностью до множителя $e^{i\alpha}$. Экстремаль $\varphi^*(z)$ единственна, если число нулей $f^*(z)$ в G более $n-2$ или же если $\operatorname{mes}E\{|f^*(x)|<\rho(x)\}>0$. В противном случае единственности $\varphi^*(z)$ может и не быть. Если $\rho(x)\equiv 1$, то $\varphi^*(z)$ единственна, если $f^*(z)\not\equiv e^{i\alpha}$, и может не быть единственной в противном случае.

Таким образом, в случае $\rho(x)\equiv 1$ получается более точный критерий единственности $\varphi^*(z)$, чем в теоремах 1 и 3 ([3]).

Теорема 3. *Существует экстремаль $\varphi^*(z)\in B$ для правой части (3). Если $\omega(x)$ непрерывна, то существует экстремаль $f^*(z)$ в левой части (3); в противном случае ее может и не существовать. Необходимым и достаточным условием того, чтобы $f^*(z)\in E_{\rho(x),1}$ и $\varphi^*(z)\in B$ были экстремальными в (3) является равенство:*

$$f^*(x)\,[\omega(x)-\varphi^*(x)]\,dx = \lambda e^{i\alpha}\frac{|f^*(x)|}{\rho(x)}\,ds,\quad \lambda>0. \tag{7}$$

Экстремаль $\varphi^*(z)$ всегда единственна, когда $f^*(z)$ существует. Экстремаль $f^*(z)$ в некоторых случаях единственна с точностью до множителя $e^{i\alpha}$, а в некоторых случаях не единственна.

Теорема 4. *Существуют единственные экстремальные функции $f^*(z)$ и $\varphi^*(z)$ в равенстве (4) ($f^*(z)$ с точностью до множителя $e^{i\alpha}$). Для того чтобы $f^*(z)\in E_{\rho(x),q}$ и $\varphi^*(z)\in E_p$ были экстремальными в (4), необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$f^*(x)\,[\omega(x)-\varphi^*(x)]\,dx = \lambda e^{i\alpha}\left[\frac{|f^*(x)|}{\rho(x)}\right]^q ds. \tag{8}$$

Теорема 5. *Существуют экстремальные функции* $f^*(z)$ *и* $\varphi^*(z)$ *в* (5). $f^*(z)$ *единственна (с точностью до множителя* $e^{i\alpha}$ *и аддитивной постоянной). Необходимым и достаточным условием экстремальности функций являются равенство*

$$[f^*(x)-a_i][\omega(x)-\varphi^*(x)]\,dx=\lambda e^{i\alpha}\rho(x)|\omega(x)-\varphi^*(x)|\,ds,$$

$$x\in\gamma_i,\quad i=1,\ldots,n. \tag{9}$$

Теорема 6. *Пусть* $\gamma\subset\Gamma$ *— правильная аналитическая дуга и* $\rho(x)$ *и* $\omega(x)$ *аналитичны на* γ, *причем* $\omega(x)$ *не совпадает на* γ *с граничными значениями ни одной из функций класса* E_1. *Тогда экстремали* $f^*(z)$ *и* $\varphi^*(z)$ *для равенства* (2) *аналитически продолжаются через* γ.

Аналоги теоремы 6 существуют и для равенств (3), (4), (5). Однако в случае (4) экстремаль $f^*(z)$ и разность $\omega(x)-\varphi^*(x)$ могут иметь на γ точки ветвления.

Теорема 7. *Пусть* $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ *— аналитические контуры,* $\omega(x)$ *аналитична на них и ни на одном из них не совпадает с граничными значениями никакой функции из* E_1. *Пусть* $\psi(z)$ *аналитична в* $\bar{G}$ *и не обращается в нуль в* $\bar{G}$. *Тогда экстремаль* $f^*(z)$ *для* (2) *с* $\rho(x)=|\psi(x)|$ *имеет вид:*

$$f^*(z)=e^{i\alpha}\psi(z)\exp\Big[-\sum_{k=1}^{m}g(z,z_k)\Big], \tag{10}$$

$g(z,z_k)$ *— комплексная функция Грина с полюсом* z_k; $m=0$ *или же* $m\geqslant n$.

Теорема 8. *Пусть* G *— единичный круг,* $\omega(x)$ *аналитична на окружности* $|x|=1$ *и не совпадает ни с одной функцией из* E_1, *а* $\ln\rho(x)$ *— гармоническая функция на окружности, за исключением некоторых точек* $x_1,\ldots,x_r$, *в которых гармоническими будут разности* $\ln\rho(x)-\ln|x-x_k|$. *Тогда экстремаль* $f^*(z)$ *в* (2) *имеет вид:*

$$f^*(z)=\exp\Big[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\rho(x)\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\Big]\prod_{i=1}^{m}\frac{z-c_i}{1-\bar{c}_iz} \tag{11}$$

(*непосредственное обобщение результатов Я. Л. Геронимуса* ([6]) *и Г. М. Голузина* ([7])).

§ 2. Рассматривая для классов $B_{\rho(x)}$, $\tilde{B}_{\rho(x)}$ экстремальные задачи, рассмотренные для B^1 в теоремах 4 — 7 работы ([3]), и в работе ([4]), получим, что экстремальные функции во всех этих задачах будут таковы, что $|f^*(x)|=\rho(x)$ почти везде на Γ или $|f^*(x)-a_i|=\rho(x)$, $x\in\gamma_i$. Делая дополнительные предположения относительно аналитичности функций $\rho(x)$ и $\omega_i(x)$ ([3]) на γ — аналитической дуге Γ, можем утверждать аналитичность $f^*(z)$ на γ. В предположениях теорем 7 или 8 экстремальные функции для всех задач из ([3]) и ([4]) будут иметь вид (10) или (11), соответственно.

Приведем еще одну теорему о нелинейных задачах. Эта теорема, хотя и касается функционалов более частного вида, чем в теореме 7 из ([3]) и теореме 2 из ([4]), представляет интерес, так как в первой из упомянутых теорем было $p_1=p_2=\ldots=p\geqslant 1$, а во второй рассматривалась лишь конечная сумма.

Пусть D — подобласть G, находящаяся на положительном расстоянии от Γ. Рассмотрим в D полную ортонормальную систему аналитических функций $\{g_k(z)\}$. Положим $M_k=\Big\{\iint\limits_D|g_k(z)|^2\,d\sigma\Big\}^{1/2}$. Пусть даны

две последовательности положительных чисел $\{p_k\}$ и $\{\rho_k\}$, причем $\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k M_k^{p_k} < +\infty$.

Теорема 9. *Экстремальными для задачи о* $\sup \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k |c_k|^{p_k}$ $\left(c_k = \iint_D f(z)\overline{g_k(z)}\,d\sigma\right)$ *будут: в* B^1 *функции, отображающие область на единичный круг или константы* $e^{i\alpha}$; *в* $B_{|\psi(x)|}$ (*теорема* 7) — *функции вида* (10); *в* $B_{\rho(x)}$ (*теорема* 8) — *функции вида* (11).

Теорема 9 может быть обобщена и развита в разных направлениях.

Владимирский государственный
педагогический институт
им. П. И. Лебедева-Полянского

Поступило
18 XII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Я. Хавинсон, Усп. матем. наук, в 4 (1949). [2] С. Я. Хавинсон, Уч. зап. МГУ, в. 148, 133 (1951). [3] С. Я. Хавинсон, ДАН, **88**, № 6 (1953). [4] С. Я. Хавинсон, ДАН, **92**, № 2 (1953). [5] И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., 1950. [7] Я. Л. Геронимус, ДАН, **14**, 95 (1937). [7] Г. М. Голузин, Матем. сборн., **18**, 213 (1946). [8] С. Я. Хавинсон, Кандидатская диссертация, 1953.